
ASTRONOMIE UND KOSMOLOGIE

II. Strahlung und Sternstruktur

Max Camenzind

Landessternwarte Königstuhl Heidelberg
14. Mai 2008

Inhaltsverzeichnis

II	Strahlung und Sterne	113
5	Strahlung und Materie	115
5.1	Das Photonengas und die spezifische Intensität	115
5.1.1	Die Spezifische Intensität	115
5.1.2	Momente der Photonenverteilung	116
5.1.3	Scheinbare und absolute Helligkeiten und ihre Farben	118
5.1.4	Photonen als Bosonen und die Planck–Verteilung	120
5.2	Transportgleichung für Photonen	125
5.2.1	Die Transportgleichung	125
5.2.2	Optische Tiefe und Quellfunktion	126
5.2.3	Lokal thermodynamisches Gleichgewicht (LTE)	128
5.2.4	Der detektierte Strahlungsstrom	128
5.2.5	Die Diffusionsnäherung	132
5.3	Klassische Strahlungsprozesse	133
5.3.1	Einstein Koeffizienten für atomare Prozesse	133
5.3.2	Die Bremsstrahlung von Plasmen	138
5.3.3	Die Kühlfunktion eines Gases	140
5.3.4	Synchrotronstrahlung relativistischer Elektronen	140
5.3.5	Inverse Compton–Strahlung	146
5.4	Zusammenfassung	146
6	Die Sterne unserer Galaxis	151
6.1	Beobachtbare Zustandsgrößen der Sterne	151
6.1.1	Distanz der Sterne	151
6.1.2	Vermessung der Galaxis mit GAIA	152
6.1.3	Leuchtkraft	155
6.1.4	Temperatur und Farben	155
6.1.5	Stellare Radien	156
6.1.6	Massen	156
6.1.7	Chemische Zusammensetzung	157
6.2	Das Hertzsprung–Russell Diagramm der Sterne	158
6.2.1	Farben–Helligkeitsdiagramme	158
6.2.2	Die Harvard Spektralklassifikation	161
6.2.3	Hertzsprung–Russell Diagramm (HRD)	163
6.2.4	Yerkes Leuchtkraftklassen	166

6.2.5	Braune Zwerge und Planeten	166
7	Aufbau der Sterne	175
7.1	Gleichgewichtsbedingungen und Grundgleichungen	175
7.1.1	1. Massenverteilung	175
7.1.2	2. Das hydrostatische Gleichgewicht	176
7.1.3	3. Energieproduktion	176
7.1.4	4. Energietransport und Temperaturverteilung	176
7.1.5	Schwarzschild Kriterium	179
7.1.6	5. Zustandsgleichung	180
7.1.7	6. Stellare Opazitäten	182
7.1.8	Kelvin–Helmholtz–Zeit	185
7.2	Thermonukleare Energieproduktion in Sternen	187
7.2.1	Die pp–Kette	187
7.2.2	CNO–Zyklus	188
7.2.3	Die Triple–Alpha Reaktion	188
7.2.4	Alpha–Reaktionen	190
7.2.5	Kohlenstoffbrennen	190
7.2.6	Sauerstoffbrennen	190
7.2.7	Siliziumbrennen	191
7.3	Sternmodelle im Gleichgewicht	192
7.3.1	Randbedingungen	192
7.3.2	Dimensionslose Strukturgleichungen: homologe Sterne	193
7.3.3	Skalierungs–Eigenschaften	195
7.3.4	Randwerte	197
7.3.5	Die Hauptreihe	199
7.3.6	Die Hayashi–Linie	206
7.4	Die Sonne als Hauptreihenstern	207
7.4.1	Von der Molekülwolke zum Protostern	207
7.4.2	Die Planeten entstehen	209
7.4.3	Das Hauptreihenstadium	212
7.4.4	Helium–Blitz und –Brennphase	213
7.4.5	Heliumschalen–Brennen	213
7.4.6	Weißer Zwerg und Planetarischer Nebel	214
7.4.7	Die Neutrinostrahlung der Sonne	214
7.4.8	Die Aktive Sonne	219
7.4.9	Der Sonnenwind	222
8	Supernovae und Kompakte Objekte	229
8.1	Entwicklung massearmer Sterne	229
8.1.1	Vom Roten Riesen zum Weißen Zwerg	229
8.1.2	Die zeitliche Entwicklung der Sonne	232
8.2	Entwicklung massereicher Sterne	232
8.3	Endphasen der Sternentwicklung	233
8.3.1	Planetarische Nebel und Weiße Zwerge	233
8.3.2	Supernovae und Hypernovae	234
8.4	Kompakte Objekte als Asche der Sternentwicklung	239

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	iii
8.4.1 Weiße Zwerge	239
8.4.2 Neutronensterne	245
8.4.3 Schwarze Löcher	252
Abbildungsverzeichnis	261
Tabellenverzeichnis	265

Teil II

Strahlung und Sterne

5 Strahlung und Materie

Das wichtigste Werkzeug der Astronomen ist zweifellos das Licht. Fast alle Informationen, die wir über ferne Sterne und Galaxien erhalten können, erreichen uns in Form von Licht oder verwandten Strahlungsarten (wenn man von Neutrinos und den hypothetischen Gravitationswellen einmal absieht). Die Spektren von Himmelskörpern liefern Erkenntnisse über ihre chemische Zusammensetzung und Temperatur, der Doppler-Effekt dient zur Messung von Geschwindigkeiten und Entfernungen und es werden immer wieder neue, raffinierte Methoden ausgetüftelt, um der empfangenen Strahlung noch mehr Details zu entlocken. Darüber hinaus ist die Tatsache, dass von allen Quellen die prinzipiell gleiche Strahlung ausgesendet wird, ein guter Beweis dafür, dass überall im Universum die gleichen Naturgesetze gelten, die die Voraussetzung für die Entstehung dieser Strahlung sind.

Elektromagnetische Strahlung entsteht durch die Schwingung elektrischer Ladungen und breitet sich als elektrisch-magnetisches Wechselfeld im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit aus. Die Schwingung erfolgt dabei in Wellenform senkrecht (transversal) zur Ausbreitungsrichtung. Je nach Frequenz (Schwingungen pro Sekunde) kann elektromagnetische Strahlung in unterschiedlichen Erscheinungsformen beobachtet werden. Das elektromagnetische Spektrum erstreckt sich von den niederfrequenten Radiowellen über das sichtbare Licht bis zur hochfrequenten Gammastrahlung. Dabei ist die Energie der Strahlung proportional zur Frequenz.

In diesem Kapitel geben wir eine kurze Einführung in die Theorie der Strahlung und der wichtigsten klassischen Strahlungsprozesse, die in der Astrophysik eine Rolle spielen.

5.1 Das Photonengas und die spezifische Intensität

5.1.1 Die Spezifische Intensität

Der Begriff der Strahlungsintensität ist fundamental in der Astrophysik. Jede astronomische Beobachtung beruht auf der Detektion von Photonen als Teilchen oder als Welle (in der Radioastronomie). Das Photonengas kann wie ein normales Gas durch eine Verteilungsfunktion $f(t, \vec{x}, \vec{p})$ im Phasenraum dargestellt werden. Der Phasenraum besteht aus den Ortskoordinaten und den Impulskoordinaten $\vec{p}$. Photonen sind masselose relativistische Teilchen mit 4-er Impuls $p^\mu = (h\nu/c)(1, \vec{n})$, $p^2 = 0$. Der 3-er Impuls $\vec{p}$ der Photonen erfüllt dabei

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{h\nu}{c} \vec{n}, \quad (5.1)$$

wobei ν die Frequenz und $\vec{k} = (2\pi/\lambda) \vec{n}$ der Wellenvektor des Photons darstellen. Die Anzahl Photonen im Phasenraumvolumen $d^3x d^3p$ zur Zeit t an der Stelle $\vec{x}$ mit Impuls $\vec{p}$ beträgt

deshalb, mit dem Impulsraumvolumen $d^3p = \vec{p}^2 dp d\Omega = (h/c)^3 \nu^2 d\nu d\Omega$,

$$dN = \frac{2}{h^3} f(t, \vec{x}, \vec{k}) d^3x d^3p = \frac{2}{c^3} f(t, \vec{x}, \vec{k}) \nu^2 d\nu d\Omega d^3x. \quad (5.2)$$

Der Faktor 2 berücksichtigt die Spinfreiheitsgrade der Photonen und h^3 stellt das elementare Phasenraumvolumen dar. Die Ausbreitungsrichtung eines Photons ist durch den Raumwinkel $d\Omega$ um den Einheitsvektor $\vec{n} = \hat{\vec{k}}$ gegeben. Die von den Photonen in diesem Volumen getragene Energie beträgt, wenn wir das Volumenelement ersetzen $d^3x = dA c dt$,

$$dE = h\nu dN = \frac{I_\nu}{c} d\nu d\Omega d^3x = I_\nu dA dt d\nu d\Omega. \quad (5.3)$$

Die Größe

$$I_\nu(t, \vec{x}, \vec{n}) = \frac{2h\nu^3}{c^2} f(t, \vec{x}, \nu, \vec{n}) \quad (5.4)$$

ist in der Astronomie als **spezifische Intensität der Strahlung der Frequenz ν in Richtung des Raumwinkels $d\Omega$** bekannt. ¹ $I_\nu d\nu d\Omega$ stellt die Photonenenergie im Intervall $[\nu, \nu + d\nu]$ dar

$$I_\nu = \frac{dE}{dt dA d\nu d\Omega}. \quad (5.8)$$

Sie hat die Dimension $[I_\nu] = \text{Watt m}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{Steradian}^{-1}$. Ohne Wechselwirkung mit Materie bleibt I_ν erhalten. Wir können das Strahlungsfeld deshalb mit der Verteilungsfunktion f darstellen oder mit der spezifischen Intensität I_ν .

5.1.2 Momente der Photonenverteilung

Wie in der kinetischen Theorie der Gase sind mit dieser Verteilungsfunktion auch Momente im Impulsraum verknüpft.

M1: Strahlungsstrom

Der Strahlungsstrom, der aus einer Fläche mit normalen $\vec{n}$ austritt, ist gegeben als (Abb. 5.1)

$$F_\nu = \int_{4\pi} I_\nu \cos \theta d\Omega. \quad (5.9)$$

Die beobachteten Strahlungsströme sind i.a. sehr klein. Deshalb verwendet man in der Astronomie als neue Einheit des spektralen Strahlungsstromes **1 Jansky** (Jy) $\equiv 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$. Der gesamte Energiestrom folgt dann aus dem Integral über die Frequenzen

$$F[\text{Watt m}^{-2}] = \int_0^\infty F_\nu d\nu. \quad (5.10)$$

¹Die zur Zeit gültigen Werte der fundamentalen Konstanten betragen

$$c = 2,9979245800 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1} \quad (5.5)$$

$$h = 6,62606876(52) \times 10^{-27} \text{ erg s} \quad (5.6)$$

$$k_B = 1,3806503(24) \times 10^{16} \text{ erg K}^{-1}. \quad (5.7)$$

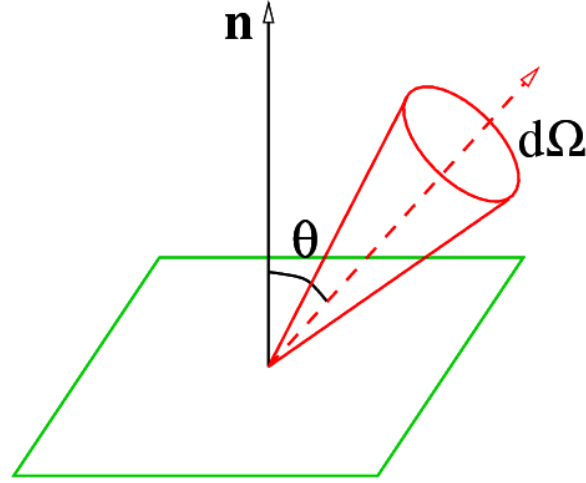


Abbildung 5.1: Der Beitrag zum Strahlungsstrom in Richtung der Normalen zu einer Fläche.

M0: Energiedichte

Durch Integration über den Raumwinkel erhalten wir die **spektrale Energiedichte** der Strahlung

$$u_\nu(t, \vec{x}) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu. \quad (5.11)$$

J_ν wird als **mittlere Strahlungsintensität** bezeichnet. Die totale Energiedichte in der Strahlung beträgt

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu. \quad (5.12)$$

M2: Der Strahlungsdruck

Der Impulsstrom in der Strahlung ist $p_\nu = I_\nu \cos^2 \theta d\Omega/c$. Die Änderung im Impulsstrom der Photonen, die von der Fläche dA pro Zeiteinheit dt reflektiert werden, beträgt

$$dp_\nu d\nu = [p_\nu|_{\text{out}} - p_\nu|_{\text{in}}] d\nu = \frac{2}{c} \int I_\nu d\nu dt dA \cos^2 \theta d\Omega. \quad (5.13)$$

Nach Newton ist damit $-dp_\nu/dt$ die Kraft, welche die Photonen auf die Fläche dA ausüben. Der Strahlungsdruck ist damit die Kraft pro Fläche, $(dp_\nu/dt)/dA$. Integrieren wir diesen Druck über die obere Halbebene, so erhalten wir den Strahlungsdruck der Photonen im Frequenzintervall ν und $\nu + d\nu$

$$P_{\text{Rad},\nu} d\nu = \frac{2}{c} \int_{2\pi} I_\nu \cos^2 \theta d\Omega d\nu = \frac{2}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu d\nu \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi. \quad (5.14)$$

Für ein **isotropes Strahlungsfeld** (unabhängig von der Richtung $\vec{n}$) ergibt sich der Gesamtdruck zu

$$P_{\text{Rad}} = \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\nu \cos^2 \theta d\Omega d\nu. \quad (5.15)$$

Dies kann auch durch die mittlere Strahlungsintensität ausgedrückt werden

$$P_{\text{Rad}} = \frac{1}{c} \int J_\nu d\nu \int \cos^2 \theta d\Omega = \frac{1}{3} u. \quad (5.16)$$

Der Strahlungsdruck in einem isotropen Strahlungsfeld beträgt 1/3 der Energiedichte. Dies folgt auch aus der Thermodynamik. Dies gilt z.B. für die kosmische Hintergrundstrahlung oder im Innern der Sterne.

5.1.3 Scheinbare und absolute Helligkeiten und ihre Farben

Seit Hipparcos bis 1860 wurden astronomische Beobachtungen nur mit dem Auge durchgeführt. Mit der Einführung der Fotografie und anderer Detektoren wurde das Auge immer mehr zum reinen Betrachter degradiert. Heute werden in der optischen und Infrarot-Astronomie alle Beobachtungen mit CCDs als Detektoren durchgeführt.

Astronomische Beobachtungen setzen immer Filter ein, so dass die Messung der Strahlung eines Objektes wie folgt gegeben ist

$$\text{Signal} = \text{Filtertransmission} \times \text{Detektor-Empfindlichkeit} \times \text{Quell-Intensität}$$

Formal bedeutet dies, dass der im Band B gemessene Strahlungsfluß aus einer Faltung folgt

$$F_B = \frac{\int_B F_\lambda T_\lambda^B \epsilon_\lambda d\lambda}{\int_B T_\lambda d\lambda}. \quad (5.17)$$

T_λ^B ist dabei die Transmission des Filters B am Teleskop, ϵ_λ die Detektorempfindlichkeit. Auch das Auge hat eine ganz bestimmte Empfindlichkeitskurve.

In den Anfängen der Astronomie wurden die sichtbaren Sterne in 6 Größenklassen eingeteilt. Da unser Auge kein linearer Detektor darstellt, sondern logarithmisch auf die einfallende Strahlung reagiert, definiert man die **scheinbaren Helligkeiten (Magnituden)** im Band B als

$$m_B = -2,5 \log \frac{F_B}{F_0}, \quad (5.18)$$

wobei F_0 eine Eichgröße darstellt. Die Helligkeit eines Objektes wird dann als 5 mag oder 5^m geschrieben. Die Eichung erfolgt am Stern Vega.

Die Magnituden verhalten sich zu ihren Strahlungsflüssen wie

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2}. \quad (5.19)$$

Der hellste Stern Sirius hat $m = -1.5$, die Sonne $m_\odot = -26.8$ und der Vollmond $m = -12.5$.

Die mit dem Gesamtfluß F berechneten Helligkeiten bezeichnet man als **bolometrische Helligkeiten**. Normalerweise verwendet man in der optischen Astronomie ein Filtersystem, um Helligkeiten zu messen. Das gebräuchlichste *UBV*-System stammt von H. Johnson und W. Morgan aus dem Jahre 1953 (U=Ultraviolett, B=blau, V=visuell; Abb. 5.2). Dazu sind noch ein *R*- und *I*-Band gekommen, sowie später die Infrarot-Bänder *J*, *K*, *L* und *M*. Daneben werden noch viele andere Filter-Systeme verwendet. Über ein System von Standardsternen kann man nun die Helligkeiten relativ bestimmen.

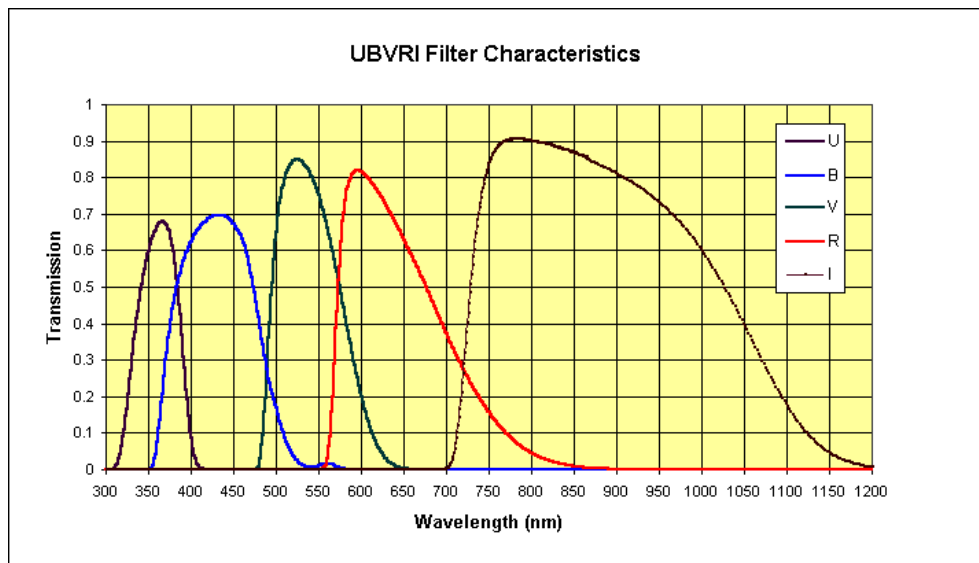


Abbildung 5.2: Transmissionsprofile der *UBV*-Helligkeiten als Funktion der Wellenlänge und die Infrarot-Filter.

Der Farbindex

Die Differenzen zwischen Helligkeiten bezeichnet man als **Farbindex**, $U - B$, $B - V$ usw. Die Konvention ist, die Magnitude bei längerer Wellenlänge von der kurzwelligen Magnitude zu subtrahieren. Die Konstante F_0 ist nun so festgelegt worden, dass $U - B = 0 = B - V$ für einen Stern der Klasse *A0* (α Lyr z.B.). Die Sonne hat $V_{\odot} = -26.8$, $B - V = 0.66$ und $U - B = 0.10$. In Katalogen werden im allgemeinen nur die *V*-Helligkeiten angegeben und die entsprechenden Farbindices.

Absolute Helligkeiten

Um die wahren Helligkeiten eines Sterns anzugeben, hat man die **absoluten Helligkeiten** M eingeführt. Sie definieren die scheinbare Helligkeit bei einer Distanz von 10 Parsek, d.h. es gilt für ein Objekt im Abstand r (in pc)

$$m - M = -2,5 \log \frac{F(r)}{F(10)} = 5 \log \frac{r}{10 \text{ pc}} . \quad (5.20)$$

$m - M$ ist als **Distanzmodul** bekannt. Entsprechend der verschiedenen Helligkeiten bezeichnet man auch die absoluten Helligkeiten mit M_U , M_B und M_V . Die absoluten **bolometrischen Helligkeiten** hängen mit der Leuchtkraft eines Objektes zusammen, $M_{bol,\odot} = 4,72$, entsprechend $L_\odot = 4 \times 10^{26}$ Watt,

$$M_{bol} - M_{bol,\odot} = -2,5 \log \frac{L}{L_\odot}. \quad (5.21)$$

Über die sog. bolometrische Korrektur, $B.C. = M_{bol} - M_V$ erhält man folgende Beziehung zwischen der Leuchtkraft L eines Objektes und seiner absoluten visuellen Magnitude

$$M_V = -2,5 \log(L/L_\odot) + 4,72 - B.C. + A_V. \quad (5.22)$$

Die bolometrischen Korrekturen für Sterne findet man in Tabelle 5.1.

Beispiel: Die Leuchtkraft einer Galaxie, $L_{Gal} = 10^{10} L_\odot$, entspricht $M = M_\odot - 25 \simeq -20$. Supernovae können ebenfalls Spitzenhelligkeiten bis zu -19,5 mag erreichen, Quasare bis zu $M = -30$. Die absolute bolometrische Helligkeit $M_{bol} = 0$ entspricht einer Leuchtkraft $L_0 = 3,0 \times 10^{28}$ Watt.

5.1.4 Photonen als Bosonen und die Planck-Verteilung

Gegen Ende des 19. Jh. hat Kirchhoff gezeigt, dass Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht mit Materie eine Verteilung annimmt, die nur von der Temperatur T abhängt, jedoch nicht von irgendwelchen Materialeigenschaften. Damit sollte gelten

$$I_\nu = B_\nu(T). \quad (5.23)$$

Es gelang dann Planck, die korrekte Form von B_ν herzuleiten

$$B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}. \quad (5.24)$$

Physikalisch betrachtet, bilden die Photonen einen Spezialfall der Bosonen. Danach ist im thermodynamischen Gleichgewicht die mittlere Besetzungszahl zum Energiezustand ϵ_j gegeben als

$$N_j = \frac{1}{\exp[(\epsilon_j - \mu)/k_B T] - 1}. \quad (5.25)$$

μ ist das chemische Potential der Bosonen. Da Photonen mit Materie über Absorption und Emission ins Gleichgewicht kommen, ist die Photonenzahlerhaltung irrelevant und damit $\mu = 0$.

Im Unterschied zu Bosonen gilt für Fermionen im Energiezustand ϵ_j

$$N_j = \frac{1}{\exp[(\epsilon_j - \mu)/k_B T] + 1}. \quad (5.26)$$

Die +1 im Nenner bewirkt, dass nicht mehr als ein Fermion das Phasenraumvolumen h^3 besetzen kann.

Diese Gleichgewichtsverteilungsfunktionen folgen aus der kinetischen Theorie der Gase. Dort zeigt man, wie die Maxwell-Verteilung eines Gases aus der Boltzmann-Gleichung im detaillierten Gleichgewicht folgt. Für Quantenteilchen folgen dann die Fermi- und Boseverteilung (siehe auch Quantenstatistik).

Die gesamte Energiedichte in der Schwarzkörperstrahlung folgt aus

$$u = \frac{4\pi}{c} \int B_\nu(T) d\nu = \frac{4\pi}{c} B(T) \quad (5.27)$$

mit

$$B(T) = \int B_\nu(T) d\nu = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{k_B T}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} = \frac{ac}{4\pi} T^4. \quad (5.28)$$

Das dimensionslose Integral folgt aus Standardtabellen zu $\pi^4/15$. Ebenso können wir den Strahlungsstrom einer isotrop strahlenden Fläche berechnen (Oberfläche einer Scheibe)

$$F = \pi \int F_\nu d\nu = \pi \int B_\nu d\nu = \pi B(T). \quad (5.29)$$

Dies führt zum Strahlungsgesetz von **Stefan-Boltzmann**

$$\boxed{F = \sigma_{SB} T^4} \quad (5.30)$$

mit den Strahlungskonstanten

$$\sigma_{SB} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = \frac{a_{SB} c}{4} = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (5.31)$$

$$a_{SB} = \frac{4\sigma_{SB}}{c} = 7,56 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}. \quad (5.32)$$

Das Spektrum der Schwarzkörperstrahlung ist in Abb. 5.3 dargestellt. Das Maximum der Verteilung liegt bei (**Wiensches Verschiebungsgesetz**)

$$h\nu_{\max} = 2,82 k_B T, \quad \nu_{\max} = 5,88 \times 10^{10} \text{ Hz } T. \quad (5.33)$$

Wenn die Planck-Verteilung als Funktion der Wellenlänge dargestellt wird, liegt ihr Maximum bei

$$\boxed{\lambda_{\max} = 2,989 \mu\text{m} (1000 \text{ K}/T)}. \quad (5.34)$$

Kühle Sterne mit Temperaturen um 3000 K weisen daher ihr Maximum im Spektrum gerade bei 1 μm auf.

Das Planck-Gesetz hat verschiedene Grenzfälle:

- **Rayleigh-Jeans Ast** $h\nu \ll k_B T$:

$$I_\nu(T) \simeq \frac{2\nu^2}{c^2} k_B T. \quad (5.35)$$

Dieser Grenzfall ist unabhängig von der Planck-Konstante.

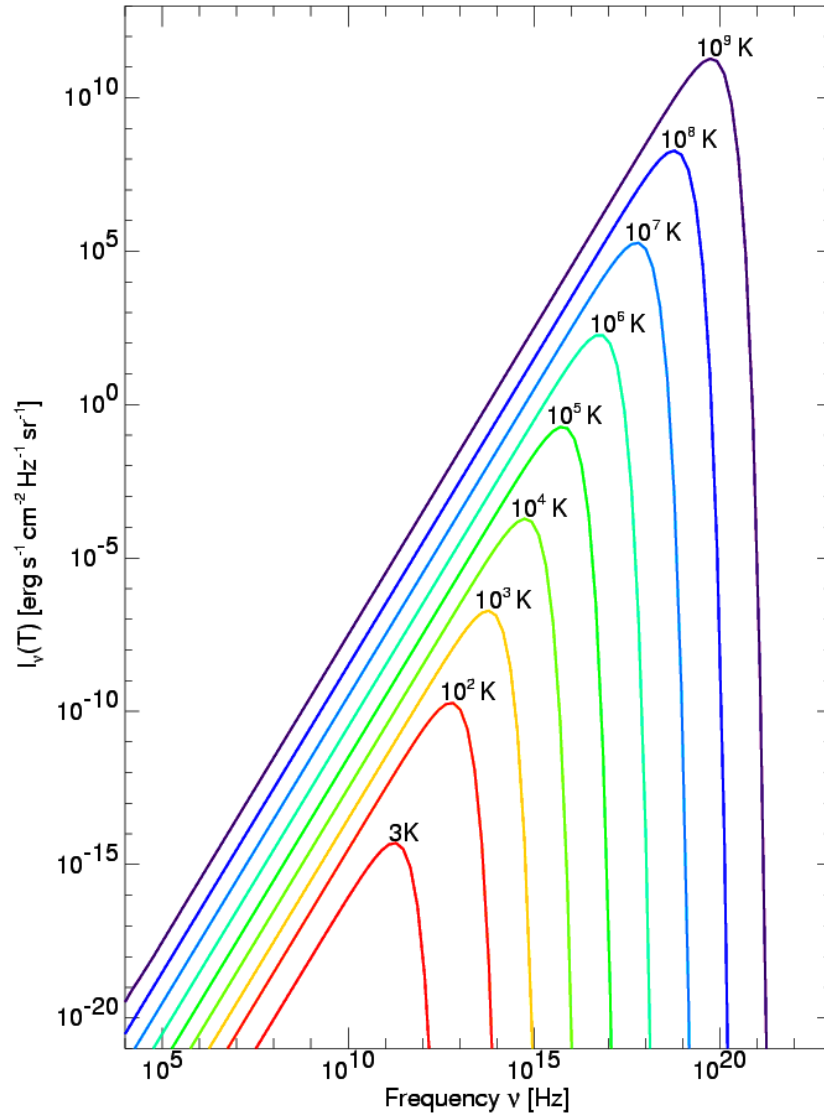


Abbildung 5.3: Spektrum der Schwarzkörperstrahlung zu verschiedenen Temperaturen T als Funktion der Frequenz oder der Wellenlänge. Die Planck-Funktion B beschreibt, wieviel Energie eine Einheitsfläche der Temperatur T in unterschiedlichen Frequenzbereichen ausstrahlt. Die Kurven sind mit der jeweiligen Temperatur markiert.

- **Wiensche Gesetz** $h\nu \gg k_B T$:

$$I_\nu(T) \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(\frac{-h\nu}{k_B T}\right) \quad (5.36)$$

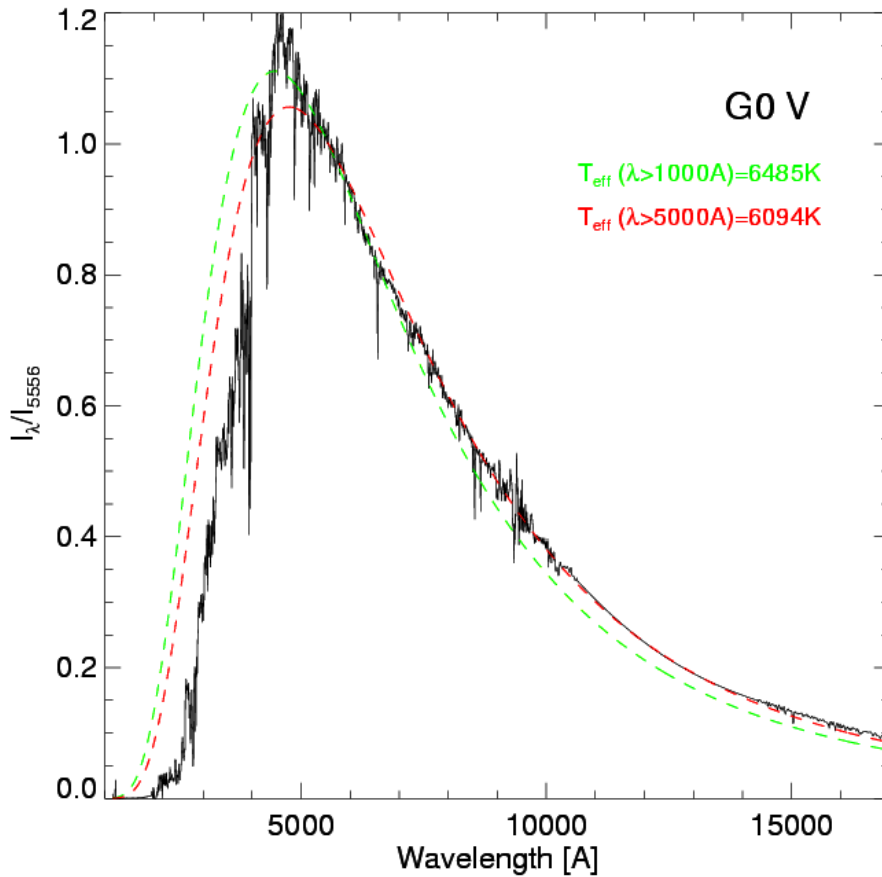


Abbildung 5.4: Planck-Kurve des Spektrums eines G0 Sterns (Sonne) (nach Pickles, PASP 110, 863 (1998)). Die Effektiv-Temperatur eines Sterns hängt vom globalen Spektrum ab, das oft nicht bekannt ist. Fittet man etwa den Teil des Spektrums oberhalb von 500 nm, so erhält man eine zu niedrige Effektiv-Temperatur.

Diese Form wurde ursprünglich von Wien unter adhoc Annahmen vorgeschlagen.

- In der Astronomie verwendet man häufig die Helligkeit eines Objektes bei einer bestimmten Temperatur. Dadurch ist die sog. **Helligkeitstemperatur** $T_b(\nu)$ definiert

$$I_\nu = B_\nu(T_b) . \quad (5.37)$$

Diese Größe wird häufig in der Radioastronomie benutzt, wo üblicherweise das Rayleigh-Jeans Gesetz gilt

$$I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} k_B T_b \quad , \quad T_b = \frac{c^2}{2\nu^2 k_B} I_\nu . \quad (5.38)$$

- **Effektiv-Temperatur:** Die Spektren der Sterne können in erster Näherung als Planck-Strahler charakterisiert werden (Abb. 5.4). Die sog. Effektiv-Temperatur einer Strahlungsquelle folgt aus dem totalen Strahlungsstrom

$$F = \int \int_0^\infty \cos \theta I_\nu d\nu d\Omega = \sigma_{SB} T_{\text{eff}}^4. \quad (5.39)$$

Oberflächen-Temperatur der Planeten

Die Temperatur eines bestrahlten Körpers folgt aus dem Energiegleichgewicht (absorbierte Energie = emittierte Energie)

$$\pi R^2 \frac{L_\odot}{4\pi a^2} = 4\pi R^2 \sigma_{SB} T^4 \quad (5.40)$$

wenn a der Abstand von der Sonne bezeichnet und R der Planetenradius ist. Daraus folgt die Temperatur

$$T = \left(\frac{L_\odot}{16\pi\sigma_{SB}a^2} \right)^{1/4} = \frac{281 \text{ K}}{\sqrt{a/1 \text{ AE}}}. \quad (5.41)$$

Man beachte, dass die Temperatur eines Planeten unabhängig von seinem Radius ist. Wenn der Planet nur einen Teil der Strahlung reflektiert und im Infraroten nur einen Teil wieder emittiert, dann wird obige Gleichung modifiziert

$$(1 - B) \pi R^2 \frac{L_\odot}{4\pi a^2} = 4\pi R^2 \epsilon \sigma_{SB} T^4 \quad (5.42)$$

und damit die Temperatur

$$T = \frac{281 \text{ K}}{\sqrt{a/1 \text{ AE}}} \left(\frac{1 - B}{\epsilon} \right)^{1/4}. \quad (5.43)$$

B ist die Bond Albedo² des Planeten und ϵ die effektive Emissivität. Für die Erde gilt: $T_{\text{Erde}} \simeq 288 \text{ K}$ und damit $\epsilon \simeq 0,55$ (Treibhauseffekt).

Die Kosmische Hintergrundstrahlung (CMBR)

Die Reliktstrahlung aus dem frühen Universum weist ein perfektes Planck-Spektrum auf (Abb. 5.5). Die entsprechende Temperatur beträgt $T = 2,725 \text{ K}$. In jedem Raumpunkt finden wir deshalb 200 Photonen pro cm^3 dieser Strahlung.

²Die Albedo (lateinisch albedo = Weißheit; v. lat. albus = weiß) ist ein Maß für das Rückstrahlvermögen von diffus reflektierenden, also nicht selbst leuchtenden Oberflächen. Sie wird bestimmt durch den Quotient aus reflektierter zu einfallender Lichtmenge. Die Albedo ist vor allem in der Meteorologie von Bedeutung, wo sie Aussagen darüber ermöglicht, wie stark sich Luft über verschiedenen Oberflächen erwärmt. Sie findet auch in der 3D-Computergrafik Anwendung, wo sie als Maß für die diffuse Streukraft verschiedener Materialien zur Simulation der Volumenstreuung dient. Ferner hat die Albedo auch eine große Bedeutung für den Erhalt des Weltklimas.

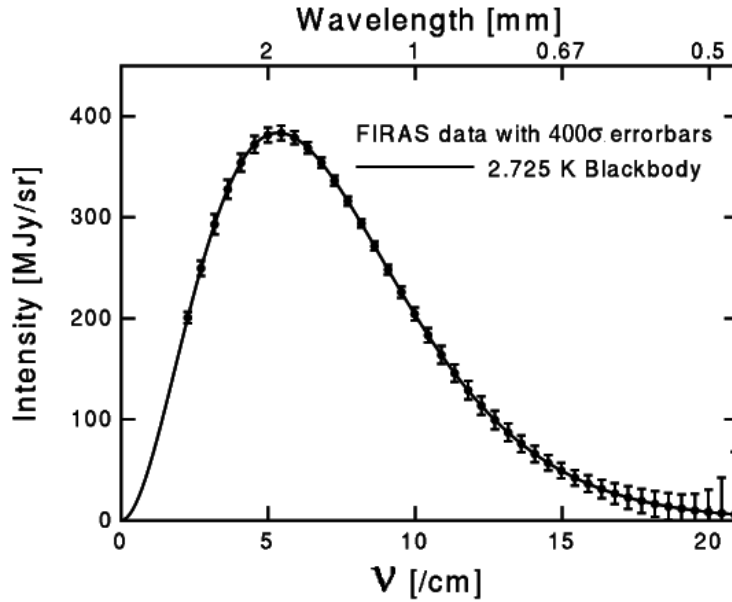


Abbildung 5.5: Das von COBE gemessene Spektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMBR).

5.2 Transportgleichung für Photonen

Da die Intensität nichts anderes als ein Maß für die Verteilungsfunktion der Photonen darstellt, folgt die zeitliche und räumliche Entwicklung von $I_\nu(t, \vec{x}, \vec{n})$ einfach aus der Boltzmann-Gleichung. Dies ist sehr ähnlich zur Behandlung etwa von Neutronentransport in Materialien.

5.2.1 Die Transportgleichung

Die klassische Transportgleichung lautet wie folgt (im Falle kohärenter Streuung)

$$(\vec{n} \cdot \nabla) I_\nu = \frac{1}{4\pi} j_\nu - \alpha_\nu^{\text{abs}} I_\nu - \rho \kappa_\nu^{\text{sca}} I_\nu + \rho \kappa_\nu^{\text{sca}} \oint \Phi_\nu(\vec{n}, \vec{n}') I_\nu(\vec{n}') d\Omega'. \quad (5.44)$$

Der Photonenstrahl ändert sich in Richtung $\vec{n}$ durch Emission des Gases, Absorption und Streuung. Dabei bedeuten die einzelnen Quell- und Verlustterme:

- ρ : die Massendichte des Gases oder Staubs,
- j_ν : die spektrale Emissivität des Gases, [$\text{W m}^{-3} \text{ Hz}^{-1}$],
- $\alpha_\nu^{\text{abs}} = n\sigma_\nu$: der spektrale Absorptionskoeffizient zum Querschnitt σ_ν ; so gilt etwa für Absorption durch Staubkörner mit Radius a und Dichte n_S : $\alpha_\nu^{\text{abs}} = \pi a^2 n_S Q_{\text{abs}}(\nu, a)$; Q_{abs} ist ein Wirkungsfaktor, der von $\lambda/2\pi a$ abhängt;
- häufig auch als $\alpha_\nu = \rho \kappa_\nu$ mit der Absorptionsopazität κ_ν (Absorptionsquerschnitt pro Masse) geschrieben;

- κ_ν^{sca} : der totale Streuquerschnitt pro Masse;
- $\Phi_\nu(\vec{n}, \vec{n}')$: die Streuwahrscheinlichkeit für Photonenstreuung von $\vec{n}'$ nach $\vec{n}$. Diese Größe erfüllt die Normierung und die Invarianz gegen Zeitumkehr

$$\oint \Phi_\nu(\vec{n}, \vec{n}') d\Omega' = 1 = \oint \Phi_\nu(\vec{n}', \vec{n}) d\Omega. \quad (5.45)$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung (5.44) berücksichtigt die Emission eines Gases, der zweite die Absorption der Photonen aus einem Strahl. Der erste Streuterm ergibt das Wachstum eines Strahls durch Streuung von Photonen mit $\vec{n}'$ in den Strahl, während der letzte Term den Verlust durch Streuung von Photonen aus dem Strahl heraus beschreibt. Unter kohärenter Streuung werden durch die stimulierte Streuung genau so viele Photonen aus dem Strahl, wie in den Strahl gestreut. Dies ist natürlich nicht mehr gewährleistet, wenn sich die Energien der Photonen im Streuvorgang ändern (z.B. in der Röntgenastronomie).

Die Berechnung der Materialgrößen j_ν , α_ν^{abs} usw. folgt dann aus einer Diskussion der einzelnen Strahlungsprozesse. So verlaufen etwa die **atomaren Absorptionsquerschnitte** $\sigma_\nu \propto \nu^{-3}$. Der Querschnitt des gebunden–frei Überganges von atomarem Wasserstoff für den n -ten angeregten Zustand hat die Form (s. Atomphysik)

$$\sigma_\nu(n) = n\sigma_1 \left(\frac{\nu_n}{\nu} \right)^3 g_n(\nu) \quad , \quad \nu_n = \nu_1/n^2 \quad , \quad \nu \geq \nu_n. \quad (5.46)$$

Für $\nu < \nu_n$ gilt $\sigma_\nu = 0$. $h\nu_1 = 13,6$ eV ist die Lyman–Kante und $g_n(\nu) \simeq 1$ ist ein Gaunt–Faktor. σ_1 ist der **Kramersche Absorptionsquerschnitt** der Lyman–Kante (cgs)

$$\sigma_1 = \frac{64}{3\sqrt{3}} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \pi a_0^2 \quad , \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,53 \times 10^{-8} \text{ cm}, \quad (5.47)$$

mit $e^2/\hbar c \simeq 1/137$ als der Feinstruktur–Konstante. Der Photoionisationsquerschnitt der Lyman–Kante ist damit ungefähr 10 mal der geometrische Querschnitt multipliziert mit der Feinstruktur–Konstante, genauer $\sigma_1 = 7,91 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$.

5.2.2 Optische Tiefe und Quellfunktion

Im folgenden betrachten wir nur stationäre Strahlungsvorgänge. Als erstes berücksichtigen wir nur Absorption. Dann lautet die Transportgleichung mit dem Linienelement ds längs der Strahlung, $d/ds = \vec{n} \cdot \nabla$,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu. \quad (5.48)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist einfach

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left(- \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \right). \quad (5.49)$$

Des weitern führen wir die **optische Tiefe** ein

$$d\tau_\nu(s) = \alpha_\nu(s) ds, \quad (5.50)$$

oder integriert

$$\tau_\nu(s) = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' . \quad (5.51)$$

Damit kann die allgemeine Transportgleichung ohne Streuung geschrieben werden

$$\boxed{\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu ,} \quad (5.52)$$

die die **Quellfunktion oder Ergiebigkeit** enthält

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{4\pi\alpha_\nu} . \quad (5.53)$$

Diese Quellfunktion ist i.a. einfacher zu handhaben als die Emissivität und Absorption im einzelnen.

Die Lösung dieser Transportgleichung kann noch geschlossen hingeschrieben werden. Dazu definieren wir

$$G = e^{\tau_\nu} I_\nu , \quad S = e^{\tau_\nu} S_\nu , \quad (5.54)$$

die erfüllt

$$\frac{dG}{d\tau_\nu} = S , \quad (5.55)$$

mit der Lösung

$$G_\nu(\tau_\nu) = G(0) + \int_0^{\tau_\nu} S(\tau'_\nu) d\tau'_\nu . \quad (5.56)$$

Ersetzen wir G , so folgt die allgemeine Lösung der Transportgleichung ohne Berücksichtigung von Streuung

$$\boxed{I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu .} \quad (5.57)$$

Die Lösung beschreibt die Absorption der ursprünglichen Strahlung durch das Medium, sowie einen Anteil von der integrierten Quellfunktion des Mediums selber.

Beispiel: Absorption in einer Schicht: Als besonders einfachen Fall betrachten wir eine konstante Quellfunktion, $S_\nu = \text{const.}$ Dann lautet die Lösung

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (5.58)$$

$$= S_\nu + e^{-\tau_\nu} (I_\nu(0) - S_\nu) . \quad (5.59)$$

Für $\tau_\nu \rightarrow \infty$ gilt $I_\nu \rightarrow S_\nu$. Das äußere Strahlungsfeld $I_\nu(0)$ wird total absorbiert, und nur die Quellfunktion an der Oberfläche trägt bei. Bei geringer optischer Tiefe $\tau_\nu \ll 1$ gilt

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) + \tau_\nu S_\nu + O(\tau_\nu^2) . \quad (5.60)$$

Betrachten wir eine Schicht der Dicke L mit $I_\nu(0) = 0$, so gilt

$$I_\nu = S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}) = \frac{j_\nu}{4\pi\alpha_\nu} (1 - e^{-\alpha_\nu L}) . \quad (5.61)$$

Kennen wir die relevanten Strahlungsprozesse in der Schicht, so folgt daraus die spektrale Abhängigkeit des Strahlungsstroms.

5.2.3 Lokal thermodynamisches Gleichgewicht (LTE)

Im thermodynamischen Gleichgewicht, d.h. in einem Hohlraum der Temperatur T , müssen die Emission und Absorption eines beliebigen Volumenelementes sich die Waage halten

$$\boxed{j_\nu = 4\pi\alpha_\nu B_\nu(T) \quad , \quad S_\nu \equiv B_\nu(T)} \quad (5.62)$$

Dies ist nichts anderes als der Kirchhoffsche Satz. Damit gilt für die Quelfunktion $S_\nu = B_\nu(T)$. In einer Atmosphäre z.B. kann die Temperatur lokal variieren. Dann spricht man vom lokal thermodynamischen Gleichgewicht (LTE), der Kirchhoffsche Satz gilt in jedem Volumenelement mit der lokalen Temperatur T . Damit gilt dann für den Strahlungsstrom aus einer plan-parallelen Schicht (z zeigt in die Schicht hinein)

$$\cos \theta \frac{dI_\nu(z, \theta)}{d\tau_\nu} = I_\nu(z, \theta) - B_\nu(T(z)) \quad (5.63)$$

5.2.4 Der detektierte Strahlungsstrom

Mit Hilfe der allgemeinen Lösung der Transportgleichung können wir nun den Strahlungsstrom F_ν berechnen, den ein Detektor registriert. Die Quelle Q der Strahlung befinde sich in



Abbildung 5.6: Eine Strahlungsquelle Q befinde sich in einem Abstand d von einem Detektor D . Die Sichtlinien durchlaufen die Quelle jeweils von s_0 bis zu einem Wert s_1 .

einem Abstand d vom Detektor und fülle einen Raumwinkel Ω am Himmel aus (Abb. 5.6).

Die Strahlung, die in den Detektor fällt, beträgt dann ³

$$F_\nu = \int_{\Omega} d\Omega I_\nu = F_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int \frac{dA}{d^2} \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu. \quad (5.64)$$

Wir integrieren zunächst die Emission längs einer Sichtlinie auf unter Berücksichtigung der Absorption längs der Sichtlinie und integrieren dann über sämtliche Sichtlinien (Raytracing). Dieser Strahlungsstrom hat die Einheit Watt m⁻² Hz⁻¹, also z.B. Janskys in der Radioastronomie.

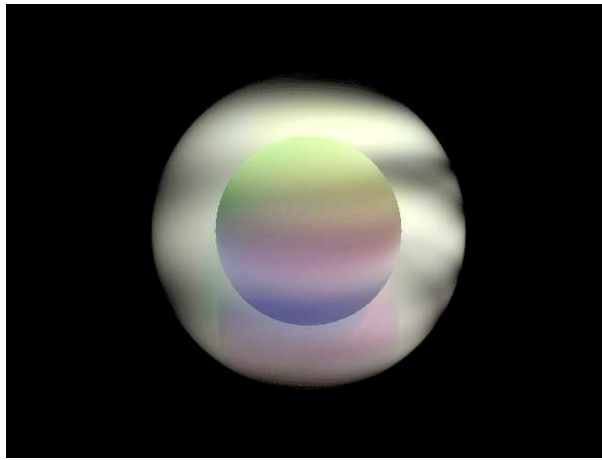


Abbildung 5.7: Strahlung einer teilweise optisch dünnen Gaskugel.

Diese Integrale sind i.a. nicht trivial. Ein Beispiel, das noch analytisch berechnet werden kann, ist die Emission einer **homogenen Kugel** mit Radius R (z.B. eine Wolke, HII Region, Galaxie oder das ganze Universum). In diesem Falle sind j_ν und α_ν konstant über die Kugel und verschwinden außerhalb der Kugel. Mit relativ geringer Anstrengung kann man zeigen, dass der Strahlungsstrom einer solchen Kugel gegeben ist als

$$F_\nu = \frac{j_\nu R^3}{(2\alpha_\nu R)d^2} u(2R\alpha_\nu) = S_\nu \frac{\pi R^2}{d^2} 2u(\tau_\nu), \quad (5.65)$$

mit der optischen Tiefe der Kugel $\tau_\nu = 2R\alpha_\nu$. Die Funktion u hängt nur von dieser optischen Tiefe ab

$$u(\tau_\nu) = \frac{1}{2} + \frac{\exp(-\tau_\nu)}{\tau_\nu} - \frac{1 - \exp(-\tau_\nu)}{\tau_\nu^2}. \quad (5.66)$$

Für $\tau_\nu \ll 1$ wird die Kugel optisch dünn (durchsichtig) und damit erhalten wir den Grenzfall

$$F_\nu = \frac{1}{3} j_\nu \frac{R^3}{d^2} = \frac{j_\nu V}{4\pi d^2}, \quad \tau_\nu \ll 1, \quad (5.67)$$

³Im allgemeinen kann die Hintergrundstrahlung nicht unterdrückt werden (der Nachthimmel ist hell !)

was schon naiv zu erwarten ist. Im umgekehrten Falle, $\tau_\nu \gg 1$, ist die Kugel optisch dick (undurchsichtig) und der Fluß erreicht den Grenzfall

$$F_\nu = \frac{1}{2} \frac{j_\nu R^3}{\tau_\nu d^2} = S_\nu \frac{\pi R^2}{d^2} \quad , \quad \tau_\nu \gg 1, \quad (5.68)$$

was auch zu erwarten ist (Abstrahlung von der Querschnittsfläche eines Sterns). Insbesondere nimmt typischerweise die optische Tiefe zu mit abnehmender Frequenz (s. Bremsstrahlung und Synchrotronstrahlung), so dass der Strahlungsstrom mit abnehmender Frequenz auch gewaltig abnimmt. Wie er genau abnimmt, hängt vom Frequenzverhalten des Absorptionskoeffizienten α_ν ab. Dabei spielt auch das Frequenzverhalten der Emissivität j_ν eine Rolle.

Extinktion und optische Tiefe

Nach (5.49) beträgt die Intensität eines Sterns mit Radius R

$$F_\nu = F_{\nu,0} \frac{R^2}{r^2} \exp(-\tau) \quad (5.69)$$

mit $\tau = \int \alpha ds \simeq \alpha r$ als der optischen Tiefe. Damit folgt der Distanzmodul

$$m - M = 5 \log \frac{r}{10 pc} + (2.5 \log e) \tau \quad (5.70)$$

oder

$$\boxed{m - M = 5 \log \frac{r}{10 pc} + A.} \quad (5.71)$$

A bezeichnet die Extinktion in Magnituden, verursacht durch das interstellare Medium zwischen Stern und Beobachter.

Dies führt zu einem weiteren Effekt: der Rötung des Sternenlichtes. Blaues Licht wird stärker gestreut und absorbiert als rotes (Abb. 5.8). Damit ergibt sich aus

$$V = M_V + 5 \log \frac{r}{10 pc} + A_V \quad (5.72)$$

$$B = M_B + 5 \log \frac{r}{10 pc} + A_B \quad (5.73)$$

ein **Farbindex**

$$B - V = M_B - M_V + A_B - A_V = (B - V)_0 + E_{B-V}. \quad (5.74)$$

$(B - V)_0$ ist die intrinsische Farbe eines Sterns und E_{B-V} der Farbexzeß. Studien am interstellaren Medium haben gezeigt, dass das Verhältnis

$$R = \frac{A_V}{E_{B-V}} \simeq 3,0 \quad (5.75)$$

praktisch konstant ist für alle Sterne.

Diese Eigenschaften hängen im wesentlichen mit dem Extinktionskoeffizienten des Staubs zusammen, der stark von der Wellenlänge abhängt (Abb. 5.8).

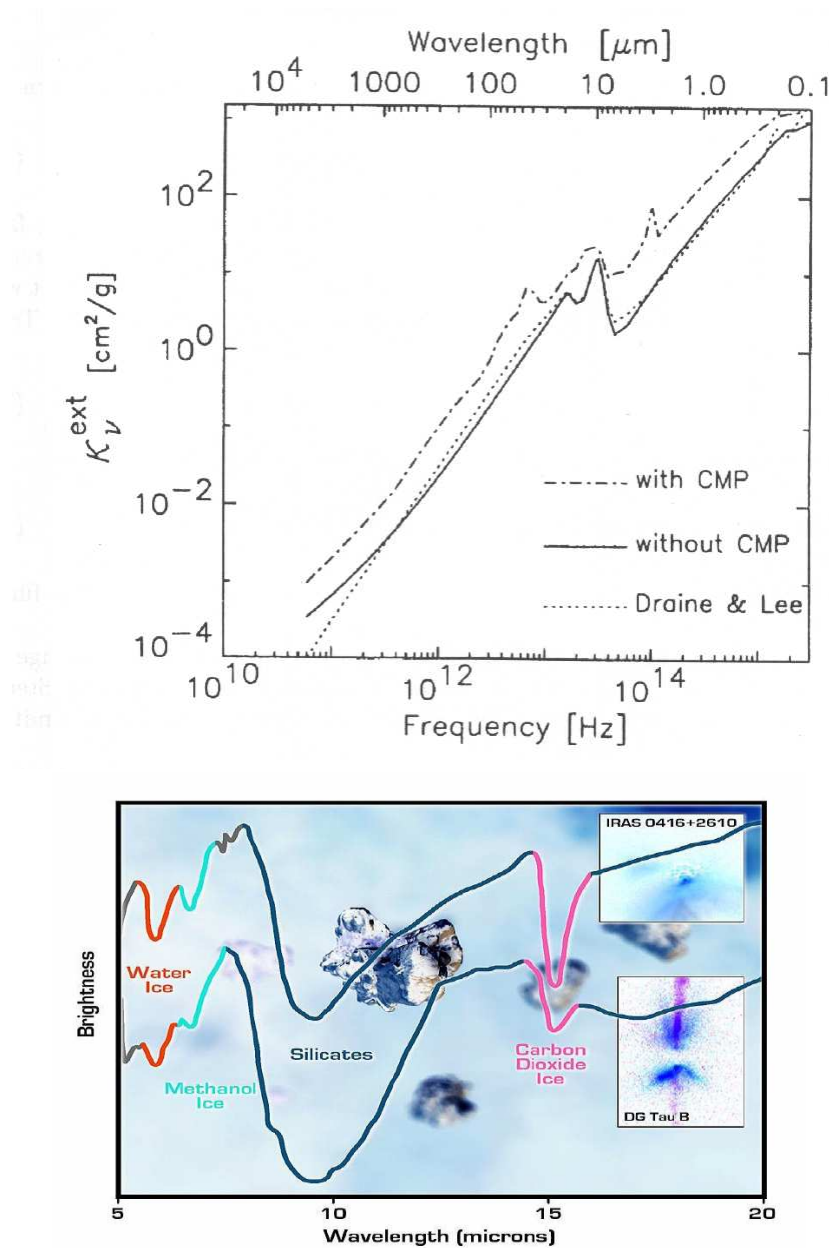


Abbildung 5.8: Oben: Massenextinktionskoeffizient von Staub als Funktion der Wellenlänge für Teilchen mit Radien a von etwa $0,1\mu\text{m}$. Da hier $\lambda \gg 2\pi a$, verhalten sich diese Teilchen wie Rayleigh-Teilchen. Bei $\lambda = 9,7\mu\text{m}$ weisen Silikate Resonanzen auf, Eis bei $\lambda = 3,07\mu\text{m}$. Falls die Staubteilchen von einem Eismantel umgeben sind (CMP=Core-Mantle-Particle), liegt der Absorptionskoeffizient höher. Diese sind im Spektrum von Staub sichtbar (unten, Spitzerspektrum).

5.2.5 Die Diffusionsnäherung

Integrieren wir die Transportgleichung (5.44) über alle Raumwinkel, so erhalten wir

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F}_\nu = j_\nu - c\alpha_\nu u_\nu, \quad (5.76)$$

falls j_ν und α_ν isotrope Funktionen sind. Die Beiträge von der Streuung fallen heraus. Dies ist die allgemeine Form einer Erhaltungsgleichung: die Energie eines Volumens ändert sich infolge der Ströme durch die Oberfläche und die Emission und Absorption im Volumen selber. Kohärente Streuung trägt nicht bei, da keine Energie zwischen Strahlung und Materie ausgetauscht wird.

Eine zweite Gleichung folgt aus der Integration des ersten Momentes der Transportgleichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{F}_\nu}{\partial t} + c \nabla \cdot \pi = -\rho(\kappa_\nu^{\text{abs}} + \kappa_\nu^{\text{sca}}) \vec{F}_\nu. \quad (5.77)$$

Wir schreiben hier die Momente des Strahlungsfeldes in Vektorform

$$\vec{F}_\nu = \int \vec{n} I_\nu d\Omega, \quad \pi_\nu = \frac{1}{c} \int \vec{n} \otimes \vec{n} I_\nu d\Omega. \quad (5.78)$$

Wie in der kinetischen Theorie der Gase ist dies kein geschlossenes System für die 3 Momente u_ν , $\vec{F}_\nu$ und π_ν .

Wir betrachten deshalb eine Situation, in der die mittlere freie Weglänge $\ell = 1/n\sigma_\nu$ der Photonen viel kleiner ist als die Abmessung des Systems (in Sternen z.B.). Für die Sonne $\ell \simeq 0,5 \text{ cm}$! Die optische Tiefe damit etwa 10^{11} . Damit herrscht im Innern der Sonne mit guter Näherung ein **isotropes Strahlungsfeld** vor

$$I_\nu \simeq B_\nu(T), \quad (5.79)$$

mit T als der lokalen Temperatur. Daraus folgt, **I**: Einheitsmatrix,

$$u_\nu \simeq \frac{4\pi}{c} B_\nu, \quad \pi_\nu \simeq \frac{4\pi}{3c} B_\nu(T) \mathbf{I} = p_\nu \mathbf{I}. \quad (5.80)$$

Im stationären Falle gilt deshalb

$$\vec{F}_\nu = -\frac{c}{\rho\kappa_\nu} \nabla \cdot \vec{\pi} = -\frac{4\pi}{3\rho\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \nabla T = -k_{\text{Rad}} \nabla T. \quad (5.81)$$

Der integrierte Strom beträgt damit

$$\vec{F} = -\frac{4\pi}{3\rho\kappa_R} \nabla T \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu. \quad (5.82)$$

κ_R ist als **Rosseland-Opazität** bekannt (Rosseland 1926)

$$\frac{1}{\kappa_R} \equiv \frac{\int_0^\infty (1/\kappa_\nu) (\partial B_\nu / \partial T) d\nu}{\int_0^\infty (\partial B_\nu / \partial T) d\nu}. \quad (5.83)$$

Da

$$\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu = \frac{d}{dT} \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{d}{dT} \left(\frac{acT^4}{4\pi} \right), \quad (5.84)$$

können wir den Strahlungsstrom auch schreiben als

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{4acT^3}{3\rho\kappa_R} \nabla T.} \quad (5.85)$$

Diese Beziehung ist als **Diffusionsnäherung** für den Strahlungsstrom bekannt. In dieser Näherung sind die Energiedichte, der Strahlungsfluß und der Strahlungsdruck durch makroskopische Größen des Systems ausgedrückt.

5.3 Klassische Strahlungsprozesse

Die Lösung der Transportgleichung hängt von j_ν und α_ν ab. Die rein atomaren Prozesse werden in der Atomphysik diskutiert. Die Eigenschaften der Bremsstrahlung sind jedoch weniger bekannt.

5.3.1 Einstein Koeffizienten für atomare Prozesse

Das Kirchhoffsche Gesetz $j_\nu = 4\pi\alpha_\nu B_\nu$, das die Emission mit der Absorption verknüpft, muß natürlich auf einer mikroskopischen Skala begründet sein. Es war Einstein, der diese Beziehungen zum ersten Male 1917 herausgearbeitet hat. Dazu betrachtete er ein Atom mit nur 2 Niveaus: 1 habe die Energie E mit statistischem Gewicht g_1 und 2 die Energie $E + h\nu_0$ mit Gewicht g_2 . Mittels Emission macht das System einen Übergang von 2 nach 1 und gibt dabei ein Photon der Energie $h\nu_0$ ab, entsprechend durch Absorption derselben Energie einen Übergang von 1 nach 2.

Dabei unterscheidet Einstein zwischen 3 Arten von Prozessen und führt A - und B -Koeffizienten ein:

- **Spontane Emission** von 2 nach 1 (auch ohne Strahlungsfeld möglich) mit A_{21} als der Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für Emission.
- **Absorption:** Wenn ein Photon mit Energie $h\nu_0$ einfällt, so macht das System einen Übergang 1 nach 2. Da die Energiedifferenz zwischen den beiden Niveaus nicht unendlich scharf ist, führen wir die Profilkfunktion $\Phi(\nu)$ ein mit

$$\int_0^\infty \Phi(\nu) d\nu = 1 \quad (5.86)$$

so dass $B_{12} \bar{J}$ die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für Absorption aus dem Strahlungsfeld J_ν darstellt. Dabei

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \Phi(\nu) d\nu. \quad (5.87)$$

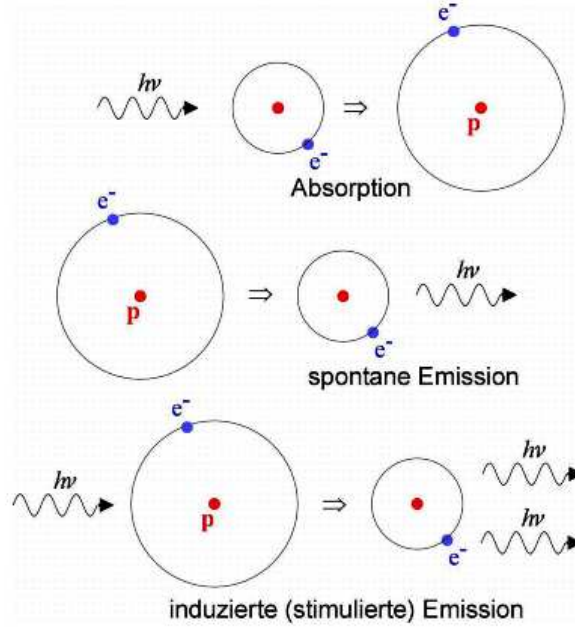


Abbildung 5.9: Die atomaren Prozesse im Strahlungsfeld.

- **Stimulierte Emission:** Der dritte Prozeß hängt vom Strahlungsfeld ab und führt ebenfalls zu Emission eines Photons mit $B_{21} \bar{J}$ als der Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für stimulierte Emission.

Häufig wird $\Phi(\nu) \propto \delta(\nu)$ gewählt. Wegen der Unschärferelation $\Delta E \Delta t \simeq \hbar$ muß die Profildfunktion durch die Lorentzsche Profildfunktion beschrieben werden

$$\Phi(\nu) = \frac{\Gamma_{21}/4\pi^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma_{21}/4\pi)^2} \quad (5.88)$$

Γ_{21}^{-1} ist dann die Lebensdauer des Niveaus $2 \rightarrow 1$.

Im thermodynamischen Gleichgewicht gilt nun

$$n_1 B_{12} \bar{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \bar{J}, \quad (5.89)$$

d.h.

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}. \quad (5.90)$$

Andererseits gilt für die Besetzungszahlen

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp(-E/k_B T)}{g_2 \exp(-(E + h\nu_0)/k_B T)} = \frac{g_1}{g_2} \exp(h\nu_0/k_B T), \quad (5.91)$$

und deshalb

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21}) \exp(h\nu_0/k_B T) - 1} = B_\nu. \quad (5.92)$$

Da im thermodynamischen Gleichgewicht $\bar{J}_\nu = B_\nu$, folgen daraus die *Einsteinschen Beziehungen*

$$\boxed{\begin{aligned} g_1 B_{12} &= g_2 B_{21} \\ A_{21} &= \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}. \end{aligned}} \quad (5.93)$$

Diese Beziehungen sind unabhängig von der Temperatur. Sie müssen daher immer gelten, auch wenn die Atome nicht im thermodynamischen Gleichgewicht sind (sog. detailliertes Gleichgewicht, s. Quantenmechanik der Strahlung).

Einstein hat den Prozeß der stimulierten Emission damals dazugenommen, da er ohne diesen Prozeß die Planckfunktion nicht herleiten konnte. Die Emission durch Stimulation erfolgt in derselben Richtung wie das einfallende Photon. Es weist auch dieselbe Energie auf.

Damit erhalten wir jetzt Ausdrücke für die makroskopischen Größen j_ν und α_ν ,

$$\boxed{j_\nu = h\nu_0 n_2 A_{21} \Phi(\nu).} \quad (5.94)$$

Die pro Zeiteinheit und Volumeneinheit absorbierte Energie beträgt

$$dV dt h\nu_0 \frac{n_1 B_{12}}{4\pi} \int d\Omega \int d\nu' \Phi(\nu') I'_\nu. \quad (5.95)$$

Damit gewinnen wir die spektral absorbierte Energie

$$dV dt d\Omega d\nu h\nu_0 \frac{n_1 B_{12}}{4\pi} \Phi(\nu) I_\nu \quad (5.96)$$

und deshalb mit $dV = dA ds$ den Absorptionskoeffizienten

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \Phi(\nu). \quad (5.97)$$

Zusätzlich müssen wir die stimulierte Emission einbeziehen

$$\boxed{\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \Phi(\nu) (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}).} \quad (5.98)$$

Mit diesen atomaren Koeffizienten läßt sich die Transportgleichung schreiben, wenn nur atomare Prozesse eine Rolle spielen,

$$\begin{aligned} \frac{dI_\nu}{ds} &= \frac{h\nu}{4\pi} n_2 A_{21} \Phi(\nu) \\ &- \frac{h\nu}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \Phi(\nu) I_\nu. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Die Quellfunktion hat daher die Form

$$S_\nu = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}}. \quad (5.100)$$

Verwenden wir die Einstein-Relationen, so erhalten wir

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \left(1 - \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1}\right) \Phi(\nu) \quad (5.101)$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{n_1 g_2}{n_2 g_1} - 1\right)^{-1}. \quad (5.102)$$

Üblicherweise gilt $n_1/g_1 > n_2/g_2$ und damit $\alpha_\nu > 0$. Hat man jedoch eine invertierte Population der Niveaus vorliegen, so wird der Absorptionskoeffizient negativ $\alpha_\nu < 0$. Dies ist die Grundlage der **Maser** in der Astronomie.⁴

Als Spezialfall erhalten wir wieder die Ausdrücke für LTE

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp(h\nu/k_B T) \quad (5.103)$$

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} [1 - \exp(-h\nu/k_B T)] \Phi(\nu) \quad (5.104)$$

$$S_\nu = B_\nu(T). \quad (5.105)$$

Die Querschnitte für atomare Übergänge hängen mit der Lebensdauer Γ_{21}^{-1} der Niveaus zusammen

$$\sigma(\nu = \nu_{21}) = 4\pi f_{12} r_e (c/\Gamma_{21}). \quad (5.106)$$

f_{12} ist die Oszillatorenstärke des betrachteten Überganges und $r_e = e^2/m_e c^2 = 2.82 \times 10^{-13}$ cm der klassische Elektronenradius.

Beispiel: Als Beispiel berechnen wir die **spontane Emission von Atomen** in der Näherung für Absorption

$$\sigma_\nu = a_{12} \delta(\nu - \nu_{12}) \quad (5.107)$$

mit $[a_{12}] = \text{cm}^2 \text{ Hz}$. Aus der Atomphysik folgt

$$a_{12} = \pi r_e^2 \frac{c}{r_e} f_{12}. \quad (5.108)$$

⁴Der Maser (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation, oder Mikrowellenverstärkung durch angeregte Strahlungsemission) ist die dem Laser entsprechende Strahlungsquelle für den Mikrowellenbereich. Ein Maser erzeugt kohärente elektromagnetische Wellen, die heutzutage einen Frequenzbereich von 10^5 Hz bis 10^{11} Hz (entsprechend 100 kHz bis 100 GHz) umfassen, entsprechend einem Wellenlängenbereich von Kilometern bis Millimetern. Die kleineren Wellenlängen sind mit Molekülschwingungen oder magnetischen Dipolübergängen in Atomen realisierbar. Grundlage ist die stimulierte Emission im Zusammenhang mit einer **Besetzungsinversion**. Dies bedeutet, dass mehr Atome oder Moleküle eines aktiven Mediums im oberen angeregten Energiezustand des betreffenden Strahlungsübergangs als im unteren Energiezustand sein müssen. Die Inversion ist eine Abweichung vom thermischen Gleichgewicht und muss durch geeignete Energiezufuhr, auch Pumpen genannt, erreicht werden.

In den 1960er Jahren wurden mit Radioteleskopen Objekte im Kosmos entdeckt, die natürliche Maserstrahlung aussenden. Die Entdeckung derartiger astronomischer Maser revolutionierte viele Erkenntnisse über unser Universum. Die frequenzscharfen Mikrowellen-Linien vor allem die 18-cm-Linie des OH-Moleküls, aber auch die 1,35-cm-Linie des Wassermoleküls geben Aufschluss über angeregte molekulare Gase um entstehende Sterne, über Veränderungen in Galaxien sowie über Hüllenprozesse in Roten Riesen und Überriesen. Allerdings sind die Pumpmechanismen dieser **natürlichen Maser** noch nicht restlos verstanden. In Frage kommen Anregungsprozesse durch Stöße mit interstellarem Staub oder optische Anregung durch die Strahlungsenergie benachbarter Sterne oder Infrarotquellen.

Da die Anzahl absorbiertter Photonen $4\pi \int \sigma_\nu (J_\nu/h\nu) d\nu$ beträgt, folgt

$$B_{12} = \frac{4\pi}{h\nu} a_{12}. \quad (5.109)$$

Aus der Einstein-Relation folgt damit für die spontane Emission

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{g_1}{g_2} B_{12} \quad (5.110)$$

$$= \frac{8\pi^2 e^2}{m_e c^3} \nu_{12}^2 (g_1/g_2) f_{12}. \quad (5.111)$$

Dies kann man sich leicht merken

$$A_{21} = (8\pi^2 f_{12} (g_1/g_2)) \frac{r_e}{c} \nu_{12}^2 \simeq 10^8 \text{ s}^{-1}, \quad (5.112)$$

wenn der Übergang im optischen Bereich liegt, $\nu_{12} \simeq 10^{15} \text{ Hz}$ und $f_{12} \simeq 1$ (sog. erlaubte Übergänge, Abb. 5.10).

Das Wasserstoff-Atom

Das Wasserstoffatom ist das am einfachsten aufgebaute aller Atome und bietet daher den Schlüssel zum Verständnis des Aufbaus und der Eigenschaften aller Atome. Es ist das einzige Atom, für das die quantenmechanische Schrödinger-Gleichung analytisch, d. h. in mathematisch geschlossener Form, gelöst werden kann. Die Spektrallinien des Wasserstoffatoms sind mit hoher Genauigkeit berechenbar, und können mit den gemessenen Werten verglichen werden, wie zum Beispiel das bekannteste Linienmultiplett, die Balmer-Serie (Abb. 5.10).

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron in den angeregten Zustand gelangt, hängt von der Temperatur ab. Bei niedrigen Temperaturen (Sterne der Spektralklassen K und M) befinden sich nur wenige Elektronen in einem angeregten Zustand. Mit Zunahme der Temperatur steigt auch die Wahrscheinlichkeit für die Stoanregung (Sterne der Spektralklasse A). Bei höheren Temperaturen werden jedoch auch immer mehr Elektronen ionisiert (Sterne der Spektralklasse B). Diese ionisierten Elektronen sind nicht mehr an den Kern gebunden und können beliebige Energiezustände erlangen. Bei sehr hohen Temperaturen (Sterne der Spektralklasse O) sind praktisch alle Wasserstoffatome ionisiert.

Die Verweildauer eines Elektrons im angeregtem Energiezustand ist jedoch wesentlich kürzer wie im Grundzustand. Beim Übergang von einem höheren Energieniveau zu einem tieferen Niveau wird die Energiedifferenz in Form eines Lichtquants emittiert (sogenannter Quantensprung). Dabei muss das Elektron von einem höheren Energieniveau nicht direkt in den Grundzustand gelangen.

Die emittierten Lichtquanten der Balmer-Serie liegen zum Teil im sichtbaren Spektralbereich. Daher sind sie für die Klassifizierung der Sterne von Bedeutung (siehe Spektrum Vega). Die H-alpha-Linie entsteht zum Beispiel durch den Sprung von $n = 3$ auf $n = 2$, die H-beta-Linie entsteht durch den Sprung von $n = 4$ auf $n = 2$. Je höher die Energiedifferenzen sind, umso stärker verschiebt sich das emittierte Lichtquant zum UV Bereich hin. Ab einer bestimmten Energie ist das Elektron nicht mehr an den Kern gebunden, das Wasserstoffatom ist dann ionisiert. Diese Energie entspricht einer Wellenlänge von 364,7 nm und wird als **Balmer-Grenze** bezeichnet. Die entsprechende **Lyman-Grenze** liegt bei einer Wellenlänge von 91,2 nm.

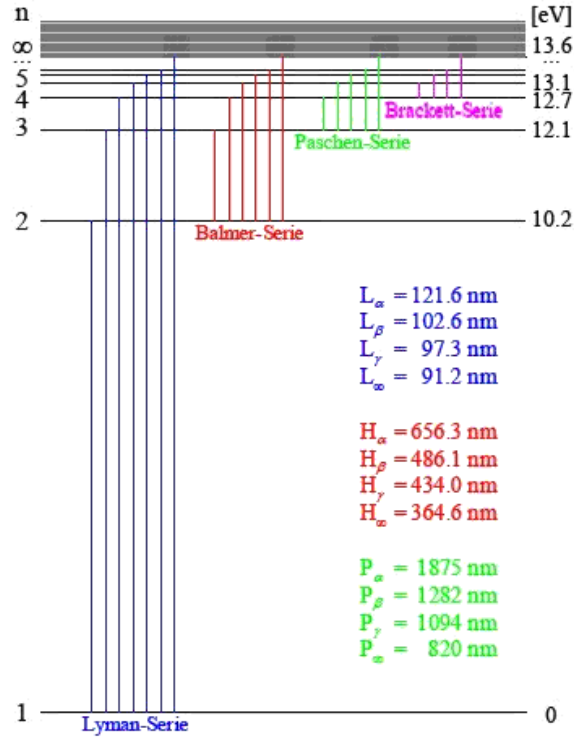


Abbildung 5.10: Übergänge im Wasserstoff-Atom mit ihren Wellenlängen. Die Lyman-Serie kann im UV beobachtet werden, die Paschen-Serie im nahen Infraroten.

5.3.2 Die Bremsstrahlung von Plasmen

Die Strahlung einer Ladung, die im Coulomb-Feld einer andern Ladung abgebremst oder beschleunigt wird, ist als **Bremsstrahlung** oder frei-frei Strahlung bekannt. Im Prinzip muss man diesen Prozeß quantenmechanisch behandeln, da die Energie der Photonen vergleichbar zur Energie des emittierenden Teilchens sein kann. Die wesentlichen Aspekte dieser Strahlung folgen jedoch schon aus einer klassischen Behandlung, die quantenmechanischen Korrekturen gehen nur als sog. Gaunt-Faktoren ein (Korrekturfaktoren). Diese Bremsstrahlung spielt eine wesentliche Rolle in astrophysikalischen Plasmen (z.B. Gas in Galaxienhaufen). Die Volumenemissivität für thermische Bremsstrahlung (cgs) beträgt

$$j_\nu^{ff} = \frac{dW}{dt dV d\omega} = 6,8 \times 10^{-38} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} Z^2 n_i n_e T^{-1/2} \exp(-h\nu/k_B T) \bar{g}_{ff} . \quad (5.113)$$

Der Faktor $T^{-1/2}$ stammt aus der Mittelung vom $1/v$ -Faktor. Der Exponentialfaktor entsteht durch die Untergrenze in der Integration bei hohen Frequenzen und reflektiert den Exponentialfaktor der Maxwell-Verteilung. Der Gaunt-Faktor $\bar{g}_{ff} \simeq 1$ entsteht aus der Geschwindigkeitsmittelung des ursprünglichen Gaunt-Faktors. $\bar{g}_{ff}$ fällt typischerweise von 5 (bei $h\nu/k_B T \simeq 10^{-4}$) auf 1 ($h\nu/k_B T \geq 1$) ab. **Damit ist das Bremsstrahlungsspektrum**

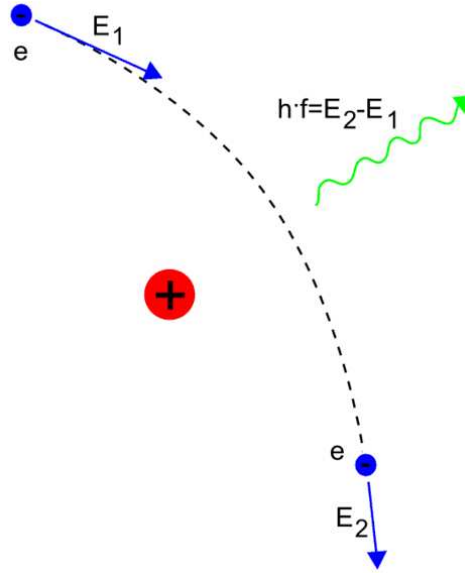


Abbildung 5.11: Bremsstrahlung an Ionen. Bremsstrahlung ist allgemein die elektromagnetische Strahlung, die entsteht, wenn ein geladenes Teilchen beschleunigt, gebremst oder abgelenkt wird. Meistens wird ein Elektron mit hoher Geschwindigkeit von einem Atomkern abgelenkt. Bremsstrahlung hat ein kontinuierliches Spektrum.

eines Plasmas immer sehr flach und hat einen Cutoff bei $h\nu = k_B T$ (solange die Quelle optisch dünn bleibt).

Durch Aufintegration der spektralen Emissivität erhalten wir nun auch die totale Emissivität eines Plasmas gegen Bremsstrahlungsverluste

$$\epsilon^{ff} = \frac{2^5 \pi e^6}{3 h m c^3} \sqrt{\frac{2 \pi k_B T}{3 m}} Z^2 n_i n_e \bar{g}_{ff}(T), \quad (5.114)$$

mit dem gemittelten Gaunt-Faktor

$$\bar{g}_{ff}(T) = \int_0^\infty \bar{g}_{ff}(T, \nu = x k_B T / h) e^{-x} dx. \quad (5.115)$$

Numerisch ergibt dies

$$\boxed{\epsilon^{ff} = 1,4 \times 10^{-27} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} Z^2 n_i n_e T^{1/2} \bar{g}_{ff}(T).} \quad (5.116)$$

Nach dem Kirchhoffschen Gesetz gehört zur Bremsstrahlungsemissivität auch ein Absorptionskoeffizient α_ν^{ff} der Bremsstrahlung

$$j_\nu^{ff} = 4 \pi \alpha_\nu^{ff} B_\nu. \quad (5.117)$$

Dies ergibt

$$\alpha_\nu^{ff} = \frac{4 e^6}{3 m h c} \sqrt{\frac{2 \pi}{3 k m}} Z^2 n_i n_e T^{-1/2} \nu^{-3} (1 - \exp(-h\nu/k_B T)) \bar{g}_{ff}, \quad (5.118)$$

oder numerisch

$$\alpha_\nu^{ff} = 3,7 \times 10^8 \text{ cm}^{-1} Z^2 n_i n_e T^{-1/2} \nu^{-3} (1 - \exp(-h\nu/k_B T)) \bar{g}_{ff}. \quad (5.119)$$

Ein wichtiger Grenzfall ist der Rayleigh–Jeans Bereich $h\nu \ll k_B T$

$$\alpha_\nu^{ff} = \frac{4e^6}{3mkc} \sqrt{\frac{2\pi}{3km}} Z^2 n_i n_e T^{-3/2} \nu^{-2} \bar{g}_{ff}, \quad (5.120)$$

oder numerisch

$$\boxed{\alpha_\nu^{ff} = 0,018 \text{ cm}^{-1} Z^2 n_i n_e T^{-3/2} \nu^{-2} \bar{g}_{ff}.} \quad (5.121)$$

Da $\alpha_\nu^{ff} \propto \nu^{-2}$, wird die Absorption wichtig bei niedrigen Frequenzen (im Radiobereich). Bremsstrahlung aus HII Regionen ist typischerweise im niederfrequenten Radiobereich selbst-absorbiert.

5.3.3 Die Kühlfunktion eines Gases

Ein kosmisches heißes Plasma kühlt bei gegebener Temperatur T , Dichten n_i, n_e und chemischer Zusammensetzung einerseits durch Linienkühlung und bei höheren Temperaturen vor allem durch Bremsstrahlung. Da diese Kühlfunktion proportional zu den Dichten ausfällt, wird eine Funktion $P(T) = \epsilon/n_i n_e$ dargestellt (s. Abb. 5.12), Einheiten: $[P] = \text{erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Diese Kühlfunktion bestimmt etwa das Verhalten des heißen Plasmas in Galaxienhaufen, das typischerweise geringe Dichten von $\simeq 10^{-3}$ Teilchen pro cm^3 aufweist. Dieses Plasma ist so dünn, dass die Kühlungszeit länger wie das Alter des Universums ausfällt. Wird das Gas durch schwere Elemente angereichert, dann tragen diese vor allem zur Kühlung bei 100'000 K bei. Dies ist etwa der Fall in der Sonnenkorona, die eine Temperatur von einer Million K aufweist und im Dichtebereich von 10^8 Teilchen pro cm^3 liegt.

5.3.4 Synchrotronstrahlung relativistischer Elektronen

Relativistische Elektronen, die in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}_0$ gyrieren, erfüllen die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{d\tau}(m_e \gamma \vec{u}) = q \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}_0 \right). \quad (5.122)$$

Mit Hilfe der Cyclotron–Frequenz ω_B , oder der Larmor–Frequenz ω_L

$$\omega_B = \frac{qB_0}{\gamma m_e c} = \frac{\omega_L}{\gamma}, \quad (5.123)$$

kann die Trajektorie zerlegt werden

$$\vec{R}(\tau) = u_z \tau \vec{e}_z + \frac{u_\perp}{\omega_B} (\cos \omega_B \tau \vec{e}_1 + \sin \omega_B \tau \vec{e}_2) \quad (5.124)$$

mit $u_\perp = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. $u_\perp/\omega_B$ entspricht dem Gyrationradius (oder Larmor–Radius)

$$R_L = \frac{v_\perp}{\omega_B} = \frac{\gamma v_\perp}{\omega_L} = 100 \text{ km} \frac{E[\text{GeV}]}{B[\text{G}]}. \quad (5.125)$$

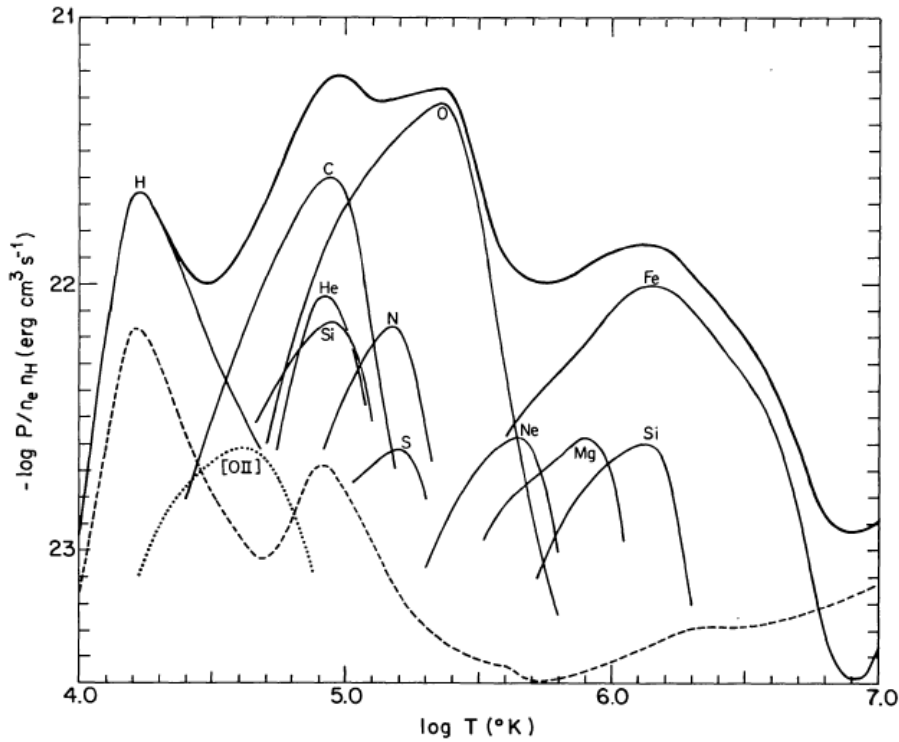


Abbildung 5.12: Die Kühlfunktion $P(T)$ eines Plasmas als Funktion der Temperatur bei einer solaren chemischen Zusammensetzung (Wasserstoff, Helium und Metalle). Die Kühlfunktion von Wasserstoff fällt rasch unterhalb von 10000 K, hier kann nur noch molekularer Wasserstoff zur Kühlung beitragen. Oberhalb von 10^7 K geht die Kühlfunktion in die Bremsstrahlung über, $P(T) \propto \sqrt{T}$.

Für relativistische Elektronenenergien gilt $v_{\perp} = c$. Im interstellaren Medium gilt z.B. $B \simeq 10^{-6}$ Gauss, $E \simeq 10$ GeV und damit folgt ein Gyrationradius $R_L \simeq 10^{14}$ cm = 7 AE, was sehr klein im Vergleich zu typischen Skalen ist.

Das Magnetfeld sei parallel zur z -Achse (Abb. 5.13). Für diese Bewegung gilt

$$a_{\parallel} = 0 \quad , \quad a_{\perp} = u\omega_B \sin \alpha \quad , \quad (5.126)$$

wobei der Winkel α der sog. Pitchwinkel der Elektronenbahn ist (Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{B}_0$). Damit erhalten wir die total abgestrahlte Leistung eines Elektrons nach der relativistischen

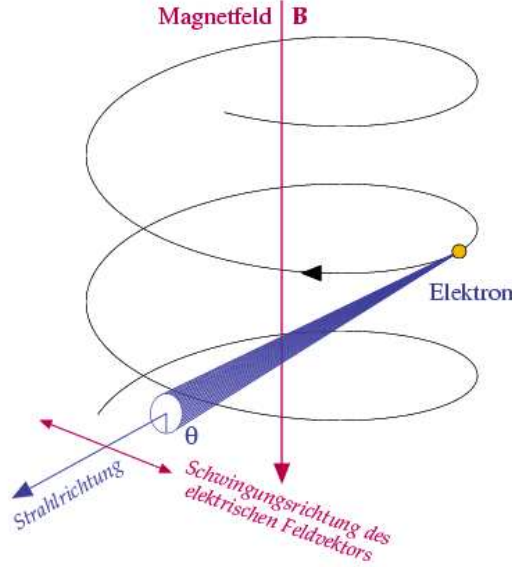


Abbildung 5.13: Bewegung relativistischer Elektronen im homogenen Magnetfeld. Die relativistische Bewegung bewirkt eine Abstrahlung in Vorwärtsrichtung mit einer Kegelöffnung $\theta \simeq 1/\gamma$, wenn γ der Lorentzfaktor der Bewegung darstellt. Das elektrische Feld schwingt in der Ebene senkrecht zur Magnetfeldrichtung. Synchrotronstrahlung ist deshalb immer stark polarisiert.

Larmor-Formel ⁵

$$P_{\text{em}} = \frac{2e^2}{3c^3} u^2 \gamma^2 \frac{e^2 B_0^2}{m_e^2 c^2} \sin^2 \alpha = \frac{2}{3} r_e^2 c \beta^2 \gamma^2 B_0^2 \sin^2 \alpha. \quad (5.130)$$

Hier haben wir den klassischen Elektronenradius benutzt, $r_e = e^2/m_e c^2$, der mit dem Thomson-Streuquerschnitt verwandt ist, $\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$. Damit können wir auch schreiben, $\beta = u/c$,

$$P_{\text{em}} = 2c\sigma_T \beta^2 \gamma^2 U_B \sin^2 \alpha. \quad (5.131)$$

$U_B = B^2/8\pi$ bezeichnet hier die magnetische Feldenergiedichte in cgs-Einheiten. Durch

⁵Die relativistische Larmor-Formel lautet (s. Landau-Lifschitz)

$$P_{\text{em}} = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^6 \left[|\dot{\vec{u}}|^2 - |\dot{\vec{u}} - \vec{u}/c|^2 \right]. \quad (5.127)$$

Wenn wir die Beschleunigung $\dot{\vec{u}}$ parallel und senkrecht zur Geschwindigkeit zerlegen

$$ua_{\parallel} = |\vec{u} \cdot \dot{\vec{u}}|, \quad ua_{\perp} = |\vec{u} \times \dot{\vec{u}}| \quad (5.128)$$

dann können wir auch schreiben

$$P_{\text{em}} = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 (a_{\perp}^2 + \gamma^2 a_{\parallel}^2). \quad (5.129)$$

Mittelung über die Winkel,

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^2 \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{3} \quad (5.132)$$

erhalten wir die klassische **Synchrotron-Verlust-Formel**

$$P_{\text{em}} = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B. \quad (5.133)$$

Um das charakteristische **Spektrum** der emittierten Strahlung zu erhalten, muß der Vektor $\vec{R}$

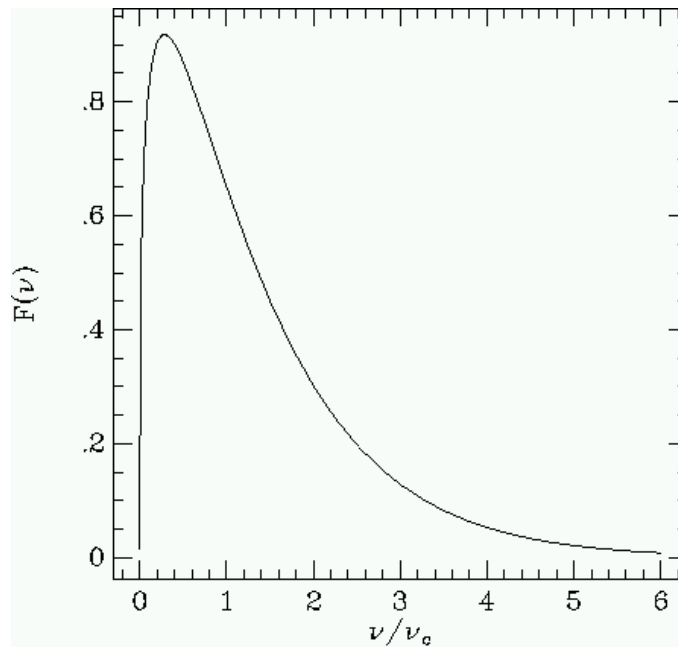


Abbildung 5.14: Das Synchrotronspektrum eines relativistischen Elektrons.

für die Gyrationbewegung spektral zerlegt werden. Diese Analyse würde im Rahmen dieser Vorlesung zu weit führen. Infolge der relativistischen Bewegung erfolgt die charakteristische Emission bei einer Frequenz

$$\nu_c = \frac{3}{2} \gamma^2 \frac{eB_\perp}{2\pi m_e c} = \frac{3}{2} \gamma^2 \nu_L, \quad (5.134)$$

und nicht etwa bei der Larmor-Frequenz selber. Dabei bezeichnet ν_L die klassische Larmor-Frequenz

$$\nu_L = \frac{eB}{2\pi m_e c} = 2,8 \text{ (MHz B/Gauss)}. \quad (5.135)$$

Der Faktor γ^2 in obiger Formel ist dafür verantwortlich, dass Synchrotronstrahlung astrono-

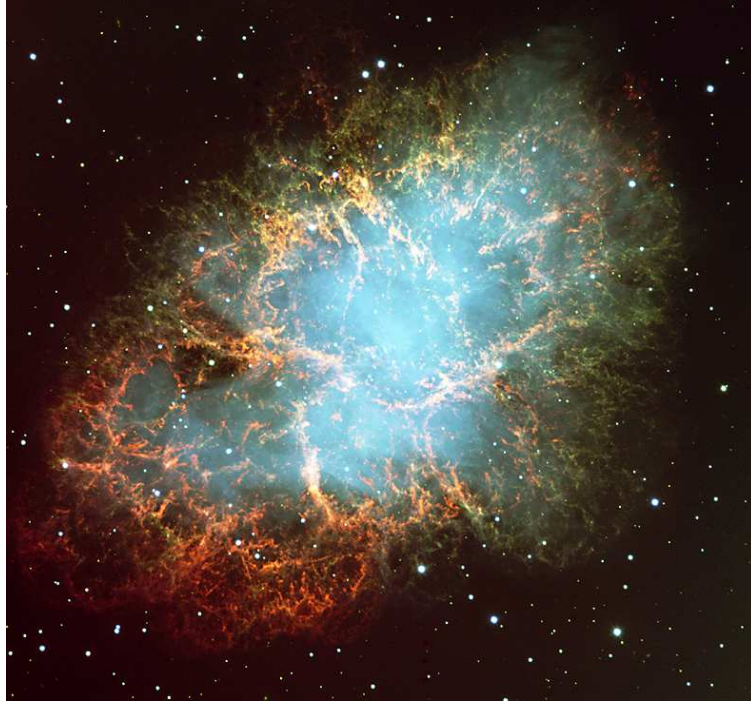


Abbildung 5.15: Der Krebsnebel Messier 1 erstrahlt im Synchrotronlicht relativistischer Elektronen (blau). Die Filamente (rötliche Farbe) entstehen jedoch durch Linienemission von Wasserstoffatomen. Der ganze Nebel ist mit einem Elektron-Positron Plasma aufgefüllt, das vom zentralen Pulsar dauernd nachgeliefert wird (sog. Pulsar-Wind). (Quelle: ESO VLT).

mischer Objekte überhaupt beobachtbar ist (z.B. in Form der Radiostrahlung von Radiogalaxien und Quasaren). Eine wichtige Eigenschaft der Synchrotronstrahlung ist ihr hoher **Polarisationsgrad**, der mit der Ausrichtung der Magnetfeldstruktur zu tun hat. Die total emittierte Strahlung eines Elektrons pro Frequenzintervall berechnet sich zu (Abb. 5.14)

$$P(\nu) d\nu = \sqrt{3} \alpha_F h \nu_B \left[\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx \right] d\nu. \quad (5.136)$$

Hier bedeuten $\alpha_F = e^2/\hbar c \simeq 1/137$ die Feinstrukturkonstante der Quantenelektrodynamik und $K_{5/3}$ die modifizierte Besselfunktion. $P(\nu)$ weist das Maximum der Emission bei einer Frequenz $\nu_{\max} = 0,29\nu_c$ auf (Abb. 5.14). Die beiden Grenzfälle lassen sich einfach untersuchen

- geringe Frequenzen: $\nu \ll \nu_c$

$$P(\nu) d\nu \simeq 5,04 \times 10^{-29} B_{\perp} \left(\frac{\nu}{\nu_c} \right)^{1/3} d\nu \text{ Watt Hz}^{-1} \quad (5.137)$$

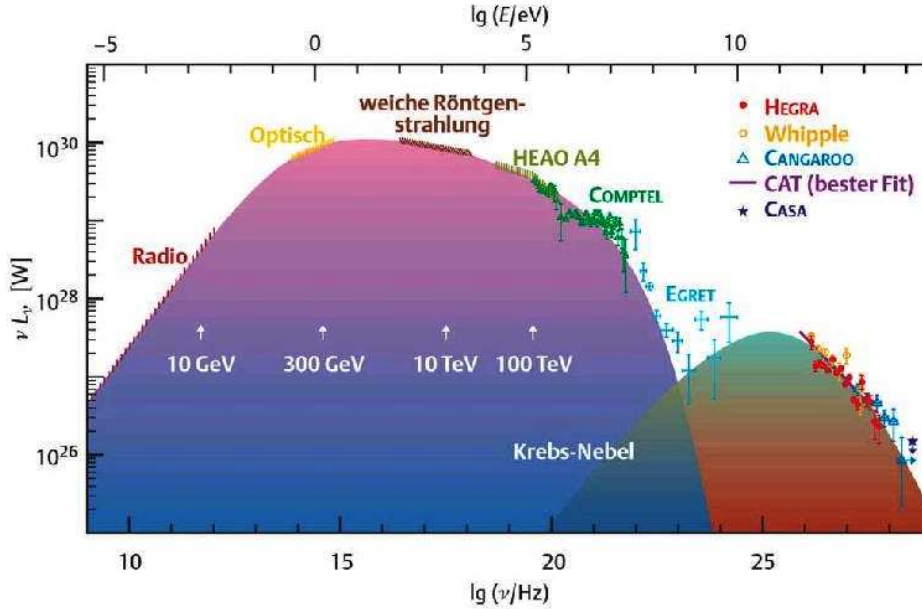


Abbildung 5.16: Das Spektrum des Krebsnebels erstreckt sich über 20 Dekaden in der Frequenz. Die Pfeile geben die typischen Energien der Elektronen bei der jeweiligen Frequenz an, die typische Magnetfeldstärke beträgt im Krebsnebel $\simeq 0,3$ milli-Gauss⁶. Die Synchrotronemission ist das Resultat einer breit gefächerten Energieverteilung der Elektronen – der Krebsnebel ist der beste Leptonen-Beschleuniger. Der Buckel im Bereich von TeV-Energien entsteht durch Compton-Streuung von Synchrotronphotonen an den relativistischen Elektronen (sog. inverse Comptonstrahlung). Diese Strahlung wird mit Hilfe von Cerenkov-Teleskopen in mondlosen Nächten detektiert (HEGRA, Whipple, Cangaroo, HESS).

- hohe Frequenzen: $\nu \gg \nu_c$

$$P(\nu) d\nu \simeq 2,94 \times 10^{-29} B_{\perp} \left(\frac{\nu}{\nu_c} \right)^{1/2} \exp(-\nu/\nu_c) d\nu \text{ Watt Hz}^{-1} \quad (5.138)$$

Oberhalb der charakteristischen Frequenz ν_c stirbt die Strahlung exponentiell aus (Abb. 5.14). Die Überlagerung dieser Spektren zu verschiedenen Energien der Elektronen führt dann zu den typischen Potenzspektren von Radioquellen, $F_{\nu} \propto \nu^{-\alpha}$ mit Spektralindex α .⁷

⁷Wenn die Energieverteilung der Elektronen als γ^{-p} gegeben ist, dann folgt der Spektralindex zu $\alpha = (p-1)/2$ (Abb. 5.16). Ein Elektronenspektrum mit $p = 2$ erzeugt deshalb ein Synchrotronspektrum mit $\alpha = 0,5$.

5.3.5 Inverse Compton–Strahlung

Der Inverse Compton-Effekt ist im Prinzip ein Spezialfall des allgemeinen Compton-Effektes. Im Allgemeinen wird unter dem Begriff des Compton-Effektes jedoch nur der Fall verstanden, dass ein Photon einer Energie $E = h\nu$ an einem quasi ruhendem Elektron einer (relativistischen) Energie E_e gestreut wird, die ungefähr seiner Ruheenergie $E_{e,0} = m_e c^2$ entspricht, wobei gilt: $E_e \gg h\nu \gg (E_e - E_{e,0})$.

Inverse Compton scattering

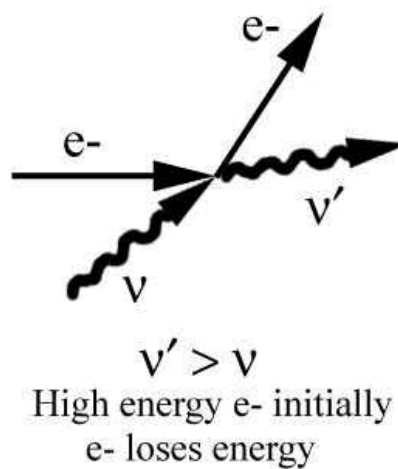


Abbildung 5.17: Im Inversen Compton–Effekt (IC) streuen relativistische Elektronen niederenergetische Photonen in den Röntgen– und Gamma–Bereich.

Als **Inverse Compton–Streuung** hingegen wird der Fall bezeichnet, dass ein Elektron (oder auch anderes geladenes Teilchen, etwa ein Proton) mit sehr hoher kinetischer Energie E_e an einem Photon mit deutlich geringerer Energie $E_{ph} = h\nu$ streut, $E = h\nu \ll E_e$ (Abb. 5.17). Der Inverse Compton–Effekt ist relevant in der Teilchenphysik (Beschleuniger-Physik), sowie in der Astrophysik. So streuen relativistische Elektronen in Jets etwa an Photonen der Hintergrundstrahlung oder an Photonen der Synchrotronstrahlung (sog. Selbst–Comptonisierung). Aber auch die relativistischen Elektronen und Positronen des Krebsnebels streuen die Synchrotronphotonen in den TeV–Bereich der Gammastrahlung (Abb. 5.16).

5.4 Zusammenfassung

- Optische Helligkeiten astronomischer Objekte werden in Magnituden angegeben. Standard ist das Johnson UBV–System.
- Sterne haben fast ein Schwarzkörper–Spektrum. Man führt deshalb die sog. Effektiv–Temperatur eines Sterns ein.
- Die Kosmische Hintergrundstrahlung weist das genaueste Planck–Spektrum auf.

- Die Ausbreitung von Photonen im interstellaren und intergalaktischen Raum wird durch Emission, Absorption und Streuung bestimmt.
- Optisch dünne Plasmen kühlen durch Linienemission und Bremsstrahlung.
- Relativistische Elektronen sind in Magnetfeldern gefangen und emittieren Synchrotronstrahlung.

Vertiefung

1. Strahlungsprozesse

- Solarkonstante: Unter welchem Raumwinkel $\Omega_\odot$ sehen wir die Sonne? Wie groß ist die spezifische Intensität $I_\odot$, wenn die Leuchtkraft der Sonne $L_\odot = 3,83 \times 10^{26}$ Watt beträgt?
- Berechnen Sie die bolometrische Leuchtkraft des Jupiters in solaren Einheiten. Charakterisieren Sie das Spektrum von Jupiter.
- Berechnen Sie die Teilchendichte der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung.
- Eine Radioquelle habe die Helligkeitstemperatur $T_b = 1000$ K, wird unter einem Winkel von $0,1''$ beobachtet bei einer Frequenz von 9 GHz. Berechnen Sie den beobachteten Strahlungsstrom F_ν in Einheiten von Jansky⁸.
- Die Kontinuumsstrahlung des **Krebsnebels** ist Synchrotronstrahlung, da sie stark polarisiert ist. Dieses Kontinuum ist vom Radiobereich über die optische Strahlung, die Röntgenemission bis in den Gamma-Bereich messbar. In diesem Sinne dient der Krebsnebel als Kalibrationsquelle für jedes neue Instrument der Astronomie (s. z.B. HST- und VLT-Aufnahmen). Die Magnetfeldstärke des Nebels kann zu 0,3 milli-Gauss (= 30 nTesla) abgeschätzt werden.
 1. Bestimmen Sie die Lorentzfaktoren γ_e der Elektronen, die im Radiobereich, im optischen Bereich, im Röntgenbereich (1 keV) und im höchsten Gamma-Bereich von 1 GeV Synchrotronstrahlung emittieren.
 2. Zeigen Sie, dass ein Elektron mit ursprünglicher Energie E_0 in den Nebel injiziert seine Energie mit der Zeit nach dem Gesetz verliert

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + t/t_{1/2}}. \quad (5.139)$$

Berechnen Sie allgemein die Kühlungszeit $t_{1/2}$ als Funktion der Magnetfeldstärke und des Lorentzfaktors $\gamma_0 = E_0/m_e c^2$.

3. Berechnen Sie die Kühlungszeit $t_{1/2}$ der Elektronen des Krebsnebels, die Radio-, optische, Röntgen- und Gamma-Strahlung emittieren.
4. Woher stammen diese hochenergetischen Elektronen? Woher stammt das Magnetfeld?

⁸1 Jansky = 10^{-26} Watt $\text{m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$

5. Wie groß ist der Larmor–Radius der Elektronen im Krebsnebel bei den höchsten Energien ?
- Was versteht man in der Astrophysik unter inverser Compton– und inverser Comptonstrahlung ?

2. Larmor-Radius

Kosmische Strahlen können Energien bis zu 10^{20} eV aufweisen. Bis zu welcher Energie werden kosmische Protonen im Magnetfeld der Galaxis gefangen? Verwenden Sie dazu den Larmor–Radius.

Sp	M_V	$B - V$	B.C.	M_{bol}	$\log T_{\text{eff}}$ [K]	$\log R$ [$R_{\odot}$]	$\log M$ [$M_{\odot}$]
O5	-5.6	-0.32	-4.15	-9.8	4.626	1.17	1.81
O7	-5.2	-0.32	-3.65	-8.8	4.568	1.08	1.59
B0	-4.0	-0.30	-2.95	-7.0	4.498	0.86	1.30
B3	-1.7	-0.20	-1.85	-3.6	4.286	0.61	0.84
B7	-0.2	-0.12	-0.80	-1.0	4.107	0.45	0.53
A0	0.8	+0.00	-0.25	0.7	3.982	0.36	0.35
A5	1.9	+0.14	+0.02	1.9	3.924	0.23	0.26
F0	2.8	+0.31	+0.02	2.9	3.863	0.15	0.16
F5	3.6	+0.43	-0.02	3.6	3.813	0.11	0.08
G0	4.4	+0.59	-0.05	4.4	3.774	0.03	0.02
G2	4.7	+0.63	-0.07	4.6	3.763	0.01	0.00
G8	5.6	+0.74	-0.13	5.5	3.720	-0.08	-0.04
K0	6.0	+0.82	-0.19	5.8	3.703	-0.11	-0.07
K5	7.3	+1.15	-0.62	6.7	3.643	-0.17	-0.19
M0	8.9	+1.41	-1.17	7.5	3.591	-0.22	-0.26
M5	13.5	+1.61	-2.55	11.0	3.491	-0.72	-0.82

Tabelle 5.1: Helligkeiten, Farbindices, Radien und Massen von Hauptreihensternen

6 Die Sterne unserer Galaxis

Die meisten Objekte, die man am Nachthimmel sehen kann, sind Sterne: Einige tausend sind mit bloßem Auge zu erkennen. Die Sonne ist ein typisches Beispiel für einen Stern – eine hauptsächlich aus Wasserstoff- und Heliumgas bestehende heiße Kugel. Die Gravitation sorgt dafür, dass die Materie nicht in den Weltraum verdampft. Der Druck, der durch die hohe Temperatur und die hohe Dichte entsteht, hält die Kugel davon ab, zusammenzuschrumpfen. Im Zentrum des Sterns sind Temperatur und Druck hoch genug, Kernfusionsreaktionen aufrechtzuerhalten. Die so erzeugte Energie arbeitet sich an die Oberfläche und wird von dort in den Weltraum abgestrahlt. Wenn der Brennstoff für diese Reaktion aufgebraucht ist, verändert sich die Struktur des Sterns. Der Prozeß, der durch Kernfusion aus leichteren Elementen immer schwerere erzeugt und die innere Struktur des Sterns anpasst, um Gravitationskraft und Druck auszugleichen, heißt Sternentwicklung.

Die Farbe eines Sterns gibt Auskunft über seine Temperatur, und diese Temperatur hängt von einer Kombination aus seiner Masse und der Entwicklungsphase, in der er sich befindet, ab. Es ist im allgemeinen auch möglich die Leuchtkraft, d.h. die Energie, die er als Licht und Wärme abstrahlt, aus der Distanz abzuleiten. Distanzmessungen an Sternen ist deshalb eine fundamentale Aufgabe der Astronomie.

6.1 Beobachtbare Zustandsgrößen der Sterne

6.1.1 Distanz der Sterne

Als Parallaxe (griech. Vertauschung, Abweichung) bezeichnet man die scheinbare Änderung der Position eines Objektes, wenn der Beobachter seine Position verschiebt. Die Parallaxe wird heute zur Entfernungsmessung der Sterne in der Galaxis eingesetzt. Als Basislinie dient der Durchmesser der Erdbahn. Der Umlauf der Erde ändert die scheinbaren Sternpositionen in Form einer kleinen Ellipse, deren Form vom Winkel abhängt, um den der Stern von der Ekliptik (Ebene der Erdbahn) absteht (Abb. 6.1). Die Parallaxe ist der Winkel, unter dem der Radius der Erdbahn vom Stern aus erscheint. Beträgt die Parallaxe eine Bogensekunde, so entspricht das einer Entfernung von 3,26 Lichtjahren oder rund 31 Milliarden Kilometern. Diese Entfernung wird auch als **Parsek** (pc, parallax arc second) bezeichnet. Da $1 \text{ Radian} = 180/\pi \times 60 \times 60 \simeq 2 \times 10^5$, ergibt dies

$$1 \text{ Parsek} = 206.265 \text{ AE} \simeq 3,08 \times 10^{16} \text{ m} . \quad (6.1)$$

Die Astronomen verwenden $1 \text{ kpc} = 1000 \text{ pc}$, $1 \text{ Mpc} = 1000 \text{ kpc}$ und $1 \text{ Gpc} = 1000 \text{ Mpc}$.

Die Parallaxe ist selbst bei nahen Fixsternen so klein, dass man sie lange nicht beobachten konnte. Dies wurde in der frühen Neuzeit als wichtigstes wissenschaftliches Argument gegen

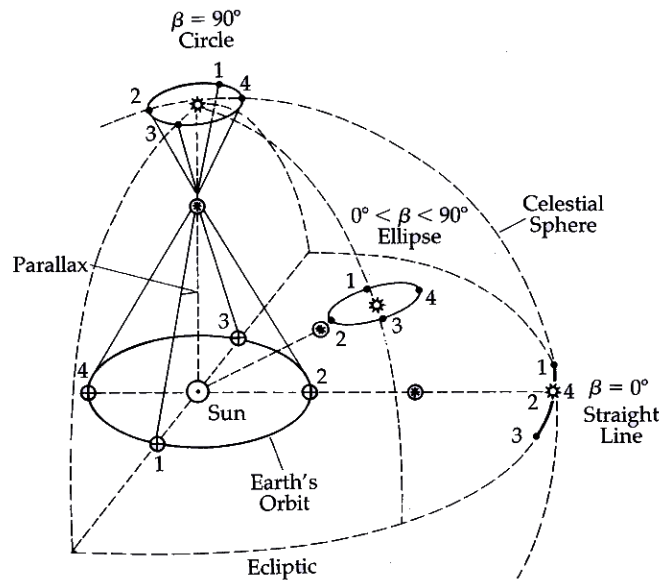


Abbildung 6.1: Die scheinbare Bewegung eines Sterns am Himmel im Laufe eines Jahres hängt von der Entfernung des Sterns ab.

das neue heliozentrische Weltbild ins Feld geführt. Auf der Suche nach der Parallaxe wurde zunächst ein völlig anderer Effekt, die **Aberration** entdeckt. Erst 1838 gelang Friedrich Wilhelm Bessel die Parallaxenmessung: er wählte den Schnellläufer (Stern mit großer jährlicher Eigenbewegung) 61 Cygni aus und konnte die halbjährliche Winkeländerung nach längeren Analysen zu $0,3''$ ($0,0002$ Grad) bestimmen. Selbst beim sonnennächsten Stern Proxima Centauri (4 Lichtjahre) beträgt die Parallaxe nur $0,772''$. In den 1990ern gelangen mit dem europäischen Astrometriesatelliten **HIPPARCOS** genaue Parallaxenmessungen für 118.000 Sterne. GAIA, sein Nachfolger, soll Ende 2011 damit beginnen, noch vierzigmal genauere Messungen an etwa 1 Milliarde Sternen durchzuführen.

Beispiel: Ein Stern in einer Entfernung von 50 pc weist eine Parallaxe von $\pi = 1/50 = 0,02$ Bogensekunden auf.

6.1.2 Vermessung der Galaxis mit GAIA

GAIA ist eine geplante astronomische Weltraummission der Europäischen Weltraumagentur ESA, mit der ungefähr 1 Prozent der Sterne unserer Milchstraße astrometrisch, photometrisch und spektroskopisch mit höchster Präzision vermessen werden soll. GAIA baut auf der Europäischen Tradition der Erstellung von präzisen Sternkarten auf, die mit der Hipparcos-Mission der ESA in den 1980er Jahren in exemplarischer Weise demonstriert wurde. Während jene Mission einhunderttausend Sterne mit hoher Präzision und über eine Million Sterne mit geringerer Genauigkeit katalogisierte, wird GAIA eine Milliarde Sterne mit bisher unerreichter Genauigkeit kartographisch erfassen.

Der Name des Astrometrie-Satelliten GAIA leitet sich ab von dem Akronym für **Globales Astrometrisches Interferometer für die Astrophysik**. Das kennzeichnet die ursprünglich für dieses Teleskop geplante Technik der optischen Interferometrie. Inzwischen hat sich jedoch das Messprinzip geändert, so dass das Akronym nicht mehr zutrifft. Trotzdem bleibt es bei dem Namen GAIA, um die Kontinuität in dem Projekt zu gewährleisten.

	Hipparcos	GAIA
untere Helligkeits-Grenze	12 mag	20 mag
Vollständigkeit	7,3 - 9,0 mag	20 mag
obere Helligkeitsgrenze	0 mag	6 mag
Anzahl Messobjekte	120.000	26 Mio. bis $V = 15$ 250 Mio. bis $V = 18$ 1000 Mio. bis $V = 20$
Effektive Reichweite	1 kpc	100 kpc
Quasare	–	1 Mio.
Galaxien	–	1 Mio. - 10 Mio.
Genauigkeit	1 mas	7 μ as bei $V = 10$ 10 - 25 μ as bei $V = 15$ 300 μ as bei $V = 20$
Photometrie	2 Farben (B, V)	Spektrophotometrie bis $V = 20$
Radialgeschwindigkeiten	–	15 km/s bis $V = 15$
Beobachtungsprogramm	ausgewählte Sterne	vollständig, ohne Vorauswahl

Tabelle 6.1: Vollständigkeit, Empfindlichkeit und Genauigkeit: Ein Vergleich Hipparcos – GAIA.

GAIA trägt drei wissenschaftliche Hauptinstrumente, die gemeinsam von einem Teleskop mit zwei weit voneinander getrennten Gesichtsfeldern am Himmel versorgt werden. Das Teleskop hat keinen kreisförmigen, sondern einen rechteckigen Primärspiegel der Größe 1,45m mal 0,5m. Alle Instrumente schauen auf die gleichen um 106,5 Grad getrennten Himmelsabschnitte.

- **Astrometrie:** Ein Feld von 76 CCD Detektoren wird die Himmelsobjekte erfassen. Das Detektorfeld wird während der GAIA-Mission die Sternpositionen und die Sternbewegungen am Himmel mit hoher Präzision erfassen.
- **Photometrie:** Vierzehn zusätzliche CCD-Detektoren werden Helligkeit und Farbe in einem breiten Wellenlängenbereich messen.
- **Spektroskopie:** Das Radialgeschwindigkeits-Spektrometer (RVS) benutzt dasselbe kombinierte Gesichtsfeld wie das astrometrische und das photometrische Instrument. Es arbeitet mit 12 CCD-Detektoren, deren spektroskopische Informationen die Ableitung der Sternbewegungen entlang der Sichtlinie erlauben. Zusammen mit dem Photometer wird es auch eine genaue Klassifikation vieler der beobachteten Objekte erlauben.

Wissenschaftliche Zielsetzung

GAIA wird Positionen (Koordinaten), Parallaxen (als Entfernungsindikatoren) und jährliche Eigenbewegungen von ungefähr 1 Milliarde Sternen bestimmen. Für die hellsten 100 Millionen Sterne wird die **Messgenauigkeit 20 Mikrobogensekunden** oder besser betragen. Für die schwächeren Sterne wird die Genauigkeit niedriger, aber immer noch unübertroffen sein. Sogar für die schwächsten Sterne wird die Genauigkeit besser als 1 Millibogensekunde sein. Außerdem werden für 1 Milliarde Sterne Helligkeit und Farbe mit hoher Genauigkeit gemessen werden. Für die hellsten 100-200 Millionen Sterne wird GAIA zusätzlich gut aufgelöste Spektren liefern, aus denen Radialgeschwindigkeit, Temperatur, Oberflächengravitation und chemische Zusammensetzung der Sterne bestimmt werden können.

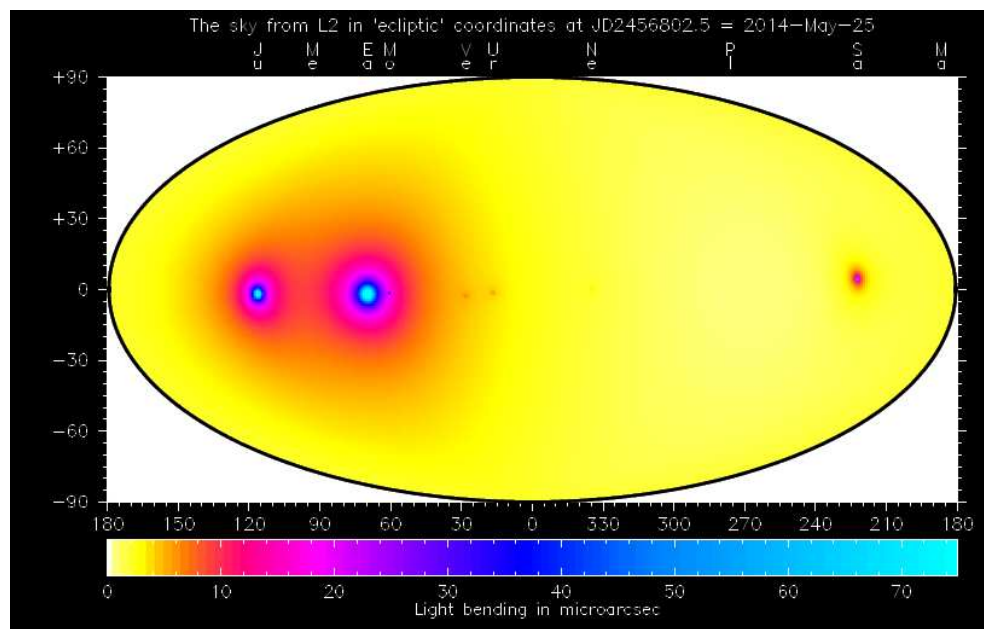


Abbildung 6.2: Lichtablenkung im Sonnensystem von L2 aus betrachtet. Der Effekt der Sonne ist rausgerechnet.

Darüber hinaus dürfte GAIA die größte Entdeckungsmaschine in der Astronomie werden. Abschätzungen lassen vermuten, dass GAIA folgende Anzahlen neuer Himmelsobjekte entdecken wird:

- bis zu einer Million Asteroiden und Kometen innerhalb unseres Sonnensystems
- dreißigtausend Planeten außerhalb unseres Sonnensystems
- fünfzigtausend sogenannte Braune Zwerge
- mehrere hunderttausend erloschene Sternüberreste, sogenannte Weiße Zwerge
- zwanzigtausend explodierende Sterne, sogenannte Supernovae
- hunderttausende weit entfernte aktive Galaxien, sogenannte Quasare

GAIA ist für eine fünfjährige Missionsdauer ausgelegt. Die Kosten der ESA für die Mission einschließlich Start, Bodenkontrolle und Nutzlast belaufen sich auf ungefähr 577 Millionen Euro. Die Kosten für die wissenschaftliche Datenreduktion (die von den Mitgliedsländern der ESA aufgebracht werden müssen) werden auf etwa 120 Millionen Euro geschätzt.

Lichtablenkung im Sonnensystem

Vor Hipparcos konnte man die **relativistische Lichtablenkung** durch die Sonne nur in unmittelbarer Nähe des Sonnenrandes nachweisen. Hipparcos war das erste Instrument, das diesen Effekt am ganzen Himmel, also auch weit weg von der Sonnenscheibe, sehen konnte. GAIA ist nochmals so viel empfindlicher, dass sogar die Lichtablenkung von Erde, Jupiter und Saturn über grosse Bereiche des Himmels deutlich sichtbar wird.

Abbildung 6.2 ist eine Karte des gesamten Himmels in ekliptikalischen Koordinaten. Sie zeigt den Gesamtbetrag der relativistischen Lichtablenkung (siehe Skala unten, in Millionstel Bogen Sekunden), die von allen Planeten zusammen erzeugt wird. Der Effekt der Sonne ist hier abgezogen. Er ist ungefähr tausendmal größer. Die Kürzel am Kopf des Bildes identifizieren die einzelnen beitragenden Planeten. Die größten Effekte werden von Erde, Jupiter und Saturn erzeugt.

6.1.3 Leuchtkraft

Aus den gemessenen Helligkeiten lassen sich mittels der Parallaxe die Leuchtkraft der Sterne bestimmen. Als Einheit dient hier die Sonnenleuchtkraft $L_{\odot} = 3,853 \times 10^{28}$ Watt, entsprechend einer bolometrischen Helligkeit von $M_{\text{bol}} = 4,72$. Leuchtkraft und bolometrische Helligkeit eines Sterns hängen deshalb wie folgt zusammen

$$M_{\text{bol}} = 4,72 - 2,5 \log(L/L_{\odot}). \quad (6.2)$$

6.1.4 Temperatur und Farben

Das Spektrum der Sterne entspricht grob dem eines Schwarzen Körpers bei der absoluten Temperatur T , welche mit der Kirchhoff-Planck-Funktion gegeben ist. Ein Stern mit Radius R hat eine Oberfläche von $4\pi R^2$, seine Leuchtkraft wäre als exakter Schwarzer Körper

$$L = 4\pi R^2 \sigma_{SB} T^4. \quad (6.3)$$

Wegen der Abweichungen der stellaren Spektren von dem (idealisierten) Spektrum eines Schwarzen Körpers definiert man die **Effektivtemperatur** T_{eff} des Sterns als diejenige Temperatur eines Schwarzen Körpers, der bei gleichgroßer Oberfläche dieselbe Leuchtkraft hat wie der Stern (Abb. 6.3). Die Effektivtemperatur ist eine wichtige Richtgröße; sie ist repräsentativ für die Temperatur des Materials an der Sternoberfläche. Je höher T_{eff} , zu desto kürzeren Wellenlängen ist das Maximum des Strahlungsstroms des Sterns verschoben. Die Effektivtemperatur der Sonne beträgt 5770 Grad Kelvin.

Astronomische Objekte können sich nicht nur in ihrer Helligkeit, sondern auch in ihrer Farbe unterscheiden. Eine genauere Betrachtung der hellsten Sterne im Orion, zeigt uns Sterne unterschiedlicher **Farbe**. Auch in der Farbfotografie vom Sternbild Orion sind die Farben der von Auge sichtbaren Sterne erkennbar.

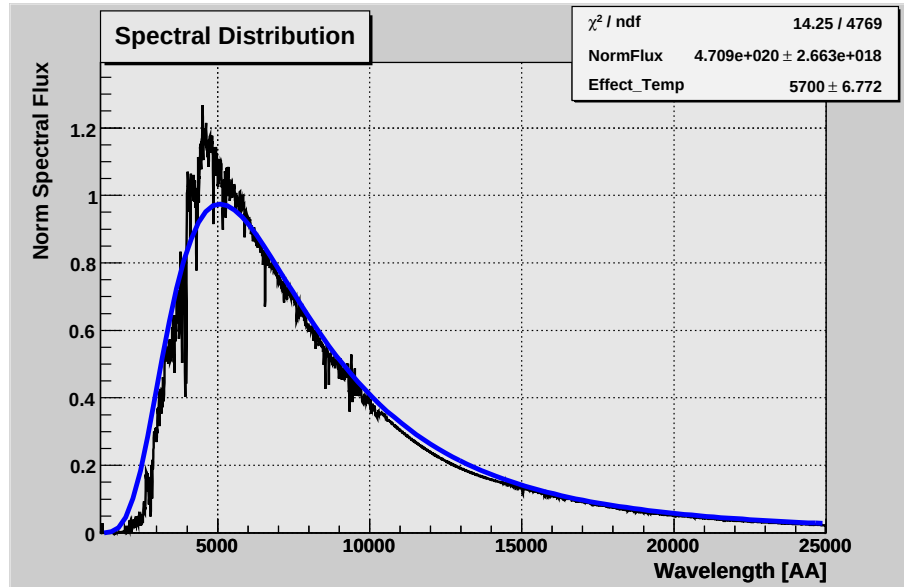


Abbildung 6.3: Stellares Spektrum und Effektivtemperatur eines G2 Sterns. Das Spektrum eines G2 Sterns (Wellenlänge in Angstrom) wird mit einer Planck-Funktion gefittet, so dass das Integral unter den Kurven identisch ist.

6.1.5 Stellare Radien

Unmittelbar messen können wir den Radius nur bei unserem nächsten Stern, der Sonne. Aus ihrem scheinbaren Winkeldurchmesser von 1/2 Grad und bei ihrer Entfernung von ca. 150.000.000km erhält man für ihren Durchmesser einen Wert von ca. $1,39 \times 10^6$ km.

Überriesen haben Radien von einigen Hundert Sonnenradien; selbst die nächsten erscheinen unter einem Winkel von weniger als 0,1 (IK Tau 0,063, R Dor 0,057). Diese lassen sich in neuerer Zeit interferometrisch (Michelsonsches Stellar-Interferometer, Speckle-Interferometrie) mit größeren Teleskopen oder mit speziellen Interferometern (PTI) bestimmen. Andere direkte Methoden zur Bestimmung der Radien sind Okkultationen (Bedeckungen durch den Mond), sowie die Auswertung der Lichtkurve bei Bedeckungsveränderlichen.

6.1.6 Massen

Stellare Massen M lassen sich in visuellen Doppelsternsystemen (mit Massen M_1 und M_2) bestimmen. Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt aus der Umlaufzeit T und der großen Halbachse der Umlaufbahn a die Gesamtmasse $M = M_1 + M_2$. Die Bewegung der Sterne in einem Doppelsternsystem kann zu messbaren Fluktuationen der Radialgeschwindigkeiten führen (spektroskopische Doppelsterne). Dabei ist die Inklination i (Winkel der Sehlinie mit der Senkrechten auf die Bahnebene) unbekannt. Der Zusammenhang zwischen Radial- und Bahngeschwindigkeit ist aber gegeben mit $v_r = v_{\text{Bahn}} \sin i$. Sind beide Sterne etwa gleich hell, so lassen die Radialgeschwindigkeiten beider Komponenten separat, und ihre Distanzen zum gemeinsamen Schwerpunkt bis auf einen Faktor $\sin i$, ermitteln. Man erhält direkt das

Verhältnis der Komponentenmassen

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{a_1 \sin i}{a_2 \sin i} = \frac{v_{1,Bahn} \sin i}{v_{2,Bahn} \sin i} . \quad (6.4)$$

Die große Halbachse $a = a_1 + a_2$ kennt man hingegen nur bis auf einen Faktor $\sin i$. Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgen schließlich die Massen bis auf einen Faktor $\sin^3 i$. Meistens ist der eine Stern zu schwach für ein Spektrum (d.h. er ist wesentlich schwächer wie sein Begleiter). Dann erhält man nur eine Radialgeschwindigkeitskurve und eine Amplitude v_1 . Zusammen mit dem 3. Keplerschen Gesetz erhält man dann die sog. **Massenfunktion**

$$\frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{T v_1^3}{2\pi G} . \quad (6.5)$$

Dies ergibt nur noch eine gewisse statistische Aussage über die Massen des Systems, falls z.B. die Inklinationwinkel i gleichmässig verteilt sind.

Nur im seltenen Fall eines nahen visuellen Doppelsterns ist dieser auch spektroskopisch messbar, so dass man alle Parameter des Systems ableiten kann. Ca. 60% aller Sterne befinden sich in Mehrfachsystemen. Zur Zeit sind aufgrund der Ergebnisse der HIPPARCOS-Mission die Massen von ca. 16000 Sternen mit guter Präzision bekannt.

6.1.7 Chemische Zusammensetzung

Die chemische Zusammensetzung in der Sternatmosphäre erhält man aus einer genauen Analyse von Sternspektren, bei welcher Stärken und Profile von Absorptionslinien analysiert und mit Modellatmosphären verglichen werden. Häufigkeiten werden dabei relativ zu Wasserstoff - dem häufigsten Element - angegeben. Chemische Häufigkeiten werden in Teilchenzahlhäufigkeiten und in Massenhäufigkeiten angegeben. Letztere werden mitunter traditionell als Zahlentripel (X, Y, Z) in Bruchteilen von Eins angegeben; dabei ist X die Häufigkeit von Wasserstoff, Y die von Helium und Z die aller höheren Elemente (häufig als Metalle bezeichnet).

Bezüglich der chemischen Zusammensetzung ergibt sich folgendes Bild:

- Die meisten Sterne und Nebel der Scheibenkomponente in der solaren Umgebung haben eine einheitliche Zusammensetzung ($X = 0.70, Y = 0.28, Z = 0.02$), mit Abweichungen von Z von 0.004 ... 0.04.
- Sterne der sphärischen Komponente der Milchstraße in der näheren Umgebung haben Metallizitäten (d. h. Werte für Z), die den solaren Wert um eine bis drei Größenordnungen unterschreiten, ohne große Abweichungen in der relativen Verteilung. Der Heliumanteil ($Y \simeq 0.25 \pm 0.03$) ist etwa solar.
- Die chemische Zusammensetzung ist schwach abhängig vom Ort in der Milchstraße, stark abhängig von der Kinematik, und vermutlich abhängig vom Alter.
- Die Sterne der Halo-Komponente der Milchstraße scheinen alle sehr alt zu sein, während Sterne der Scheibenkomponente sehr jung bis mittelalt sind. Damit scheinen die Häufigkeiten im Halo die ursprüngliche Verteilung im Kosmos wiederzuspiegeln. Die Zunahme der Metalle bei jüngeren Sternen ist durch die chemische Evolution der Milchstraße zu erklären.

- Einige Sterne zeigen Anomalien in ihren Häufigkeiten, welche man auf Strukturen in ihren Atmosphären während gewisser Phasen der Sternentwicklung zurückführt (z.B. Helium–reiche/arme Sterne, Kohlenstoff–reiche Sterne).

Parameter	Sonne	Sterne
Radius	$R_{\odot} = 7 \times 10^8 \text{ m}$	0,01 - 100 $R_{\odot}$
Masse	$M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$	0,08 - 100 $M_{\odot}$
Effektiv–Temperatur	$T_{\text{eff},\odot} = 5770 \text{ K}$	2500 - 50.000 K
Leuchtkraft	$L_{\odot} = 3,8 \times 10^{26} \text{ Watt}$	$10^{-4} - 10^6 L_{\odot}$
Chemische Häufigkeit	$Z_{\odot} = 0,02$	0,001 - 5 $Z_{\odot}$

Tabelle 6.2: Typische stellare Parameter.

6.2 Das Hertzsprung–Russell Diagramm der Sterne

6.2.1 Farben–Helligkeitsdiagramme

Sterne weisen verschiedene Farben auf (Abb. 6.4). Aus historischen Gründen hat sich hier eine Klassifikation eingebürgert, die bis heute erhalten blieb. Dies sieht man sehr schön, wenn man die Helligkeiten der Sterne in einem Kugelsternhaufen (z.B. von M55) gegen den Farbindex aufträgt (Abb. 6.5). Kugelsternhaufen enthalten bis zu einigen hundert tausend Einzelsterne in einem Volumen, das nur wenige Lichtjahre Ausdehnung hat. Trägt man die Helligkeit dieser Sterne gegen ihre Farbe auf, z.B. $B - V$, so entsteht ein sog. **Farben–Helligkeitsdiagramm**. Da sich alle Sterne praktisch in derselben Entfernung befinden, ist die scheinbare Helligkeit zugleich ein Maß für die absolute Helligkeit. In Abb. 6.5 ist das Farben–Helligkeitsdiagramm des Kugelsternhaufens M 55 gezeigt.

Der markanteste Vertreter der kugelförmigen Sternhaufen, kurz Kugelsternhaufen genannt, ist M 13 im Sternbild Herkules. Die Sternkonzentration nimmt zur Mitte hin zu, wodurch man die einzelnen Sterne nicht mehr erkennen kann. Man sieht dort den gemeinsamen Lichtschein vieler Sterne. Dagegen kann man in den Randpartien Zehntausende von Sternen als einzelne Lichtpünktchen ausmachen. Kugelsternhaufen sind am Himmel nicht gleichmäßig verteilt, sondern befinden sich fast ausschließlich in einer Hälfte des Himmels. Sie sind die fernsten Objekte, die man in unserer Milchstraße beobachten kann und zigtausende Lichtjahre entfernt. M 13 ist 23.000 Lichtjahre und M 15 33.000 LJ. Kugelsternhaufen enthalten die ältesten bekannten Sterne, mindestens 10 Milliarden Jahre alt. Im Gegensatz zu den offenen Sternhaufen sind Kugelsternhaufen äußerst stabil. Auch nach Milliarden von Jahren haben sie sich noch nicht aufgelöst. Die Sterne in Kugelhaufen laufen auf rosettenförmigen Bahnen um das Zentrum. Die schnellsten Sterne verlassen dabei den Haufen. In unserer Milchstraße sind rund 150 Kugelsternhaufen bekannt. Die Gesamtzahl schätzt man auf etwa 800. In der Riesengalaxie M 87 hat man über 1000 Kugelsternhaufen identifiziert.



Abbildung 6.4: Der Kugelsternhaufen Messier 15 (M15) mit HST aufgenommen. Das Welt-
raumteleskop kann selbst das dichte Zentrum des Kugelsternhaufens in einzelne Sterne auflösen.
Damit lassen sich die Farben der einzelnen Sterne messen (bis zu 100.000 !).

Die Sterne eines Kugelsternhaufens füllen nicht das ganze Diagramm aus, sondern grup-
pieren sich vornehmlich in einzelnen Ästen. Im Farben–Helligkeitsdiagramm unterscheidet
man folgende **Äste** (engl. 'Branches') (s. Abb. ??):

- Hauptreihe ('main sequence')
- Riesenast ('red giants')
- Horizontalast ('horizontal branch')
- Lücke ('gap')

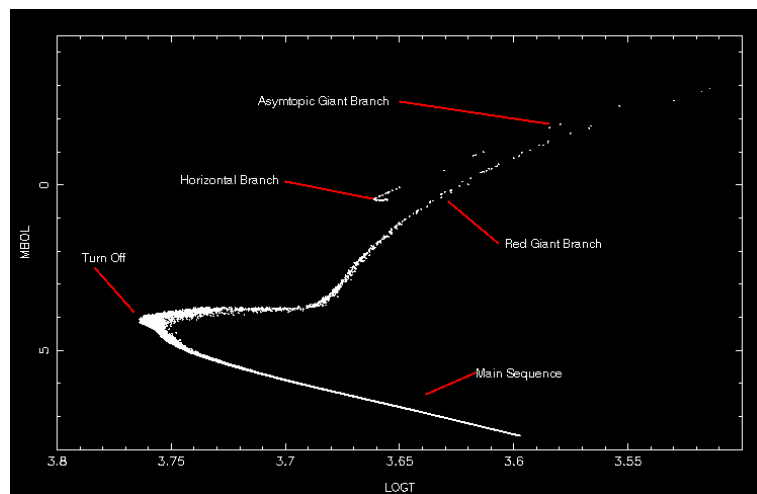
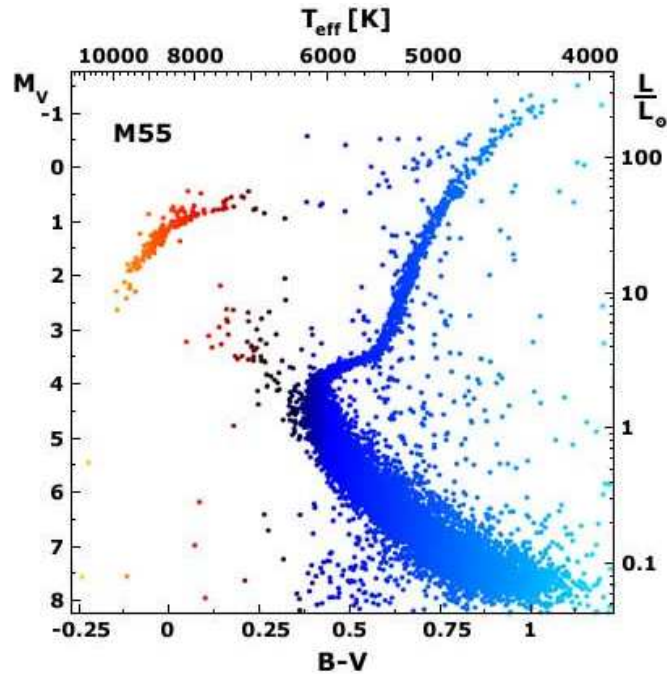


Abbildung 6.5: Oben: Lage der verschiedenen Äste im Farben–Helligkeitsdiagramm des Kugelsternhaufens M55. Von unten nach oben sind sichtbar: Hauptreihe, Riesenast (nach rechts), Horizontalast (bei konstanter Helligkeit $M_V \simeq 0,5$) und der asymptotische Riesenast, der sich von links zum Riesenast hinzieht. In der Lücke (Gap) im Horizontalast sitzen die pulsierenden RR Lyrae Sterne. Mittels dieser Sterne kann die Distanz ermittelt werden, so dass die scheinbare Leuchtkraft gegen die absolute M_V ersetzt werden kann. Die rechte Skala gibt die Leuchtkraft in Einheiten der Sonnenleuchtkraft an. Am oberen Rand ist die Effektiv–Temperatur aufgetragen, wie sie der Farbe entspricht. Unten: Schematische Zuordnung der einzelnen Äste im FH–Diagramm.

- Asymptotische Riesenast ('AGB')

Wir werden später sehen, dass diese Äste bestimmten Entwicklungsstadien der Sterne zuzu-schreiben sind.

6.2.2 Die Harvard Spektralklassifikation

Neben diesen photometrischen Untersuchungen an Sternen hat man vor über 100 Jahren be-gonnen, Sterne auch spektroskopisch zu untersuchen. Im Anschluß an die Entdeckungen von Fraunhofer, Kirchhoff und Bunsen hat man begonnen, Sternspektren zu analysieren. Da-bei stellte sich heraus, dass man diesen im wesentlichen eine einparametrische Schar zuordnen kann. Der Henry Draper Katalog (HD), der 225.000 Sterne enthält, wurde von 1918 bis 1924 publiziert ¹ Er enthält Sterne bis zur 9. mag. Viele Sterne tragen heute noch HD-Nummern (HD1 ist Betgeuze). Insgesamt wurden mehr als 390.000 Sterne in Harvard klassifiziert. Dies ist im wesentlichen eine Klassifikation nach Farben (von Blau – Gelb – Rot), d.h. nach Effektiv-Temperaturen (Abb. 6.6)

O – B – A – F – G – K – M – (C / S)

Diese Spektralklassen werden nochmals in Unterklassen 0...9 aufgeteilt, z.B. B9 Stern, die Sonne ist G2.

Die physikalische Begründung für diese Klassifizierung war zunächst nicht klar. Vega z.B. (Spektraltyp A0) zeigt ausgeprägte Wasserstofflinien, viel stärker etwa als im Sonnenspek-trum. Dafür ist die Ca–Linie bei der Sonne viel stärker ausgeprägt.

Die Klassen haben folgende wichtigsten Eigenschaften (Abb. 6.8, 6.9):

- **Typ O:** blaue Sterne mit Oberflächentemperaturen von 25'000 – 50'000 K; Spektrum enthält Linien von mehrfach ionisierten Atomen HeII, CIII, NIII, OIII, SiV, Wasserstoff relativ schwach.
- **Typ B0:** weiß-blaue Sterne mit $\simeq 25'000$ K; keine HeII Linien mehr, HeI (403 nm), CaII bei B3, HeI, OII, SiII, MgII.
- **Typ A0:** 10'000 K Oberflächentemperatur; starke HeI, H und K Linien von Ca, Wasser-stoff maximal.
- **Typ F0:** Farbe gelb–weiß; 7600 K; HeI wird schwach, H und K von CaII stärker, Metal-linien (Fe).
- **Typ G0:** Farbe gelb; 6000 K; H und K Linien stark, Metallinien werden stärker.
- **Typ K0:** Farbe orange-gelb; 5100 K; Metallinien dominant, CaI (422.7 nm) sichtbar, TiO Banden werden sichtbar bei K5.
- **Typ M0:** Farbe rot; 3600 K; TiO–Banden stark, neutrale Metallinien.
- **Typ C:** Kohlenstoff–Sterne; 3000 K; Moleküle C_2 , CN, CH, keine TiO–Banden.
- **Typ S:** Farbe rot; 3000 K; viele Moleküle.

¹1872 nahm Henry Draper das erste Sternspektrum auf. Der Katalog trägt deshalb seinen Namen und wurde mit seinem Geld finanziert.

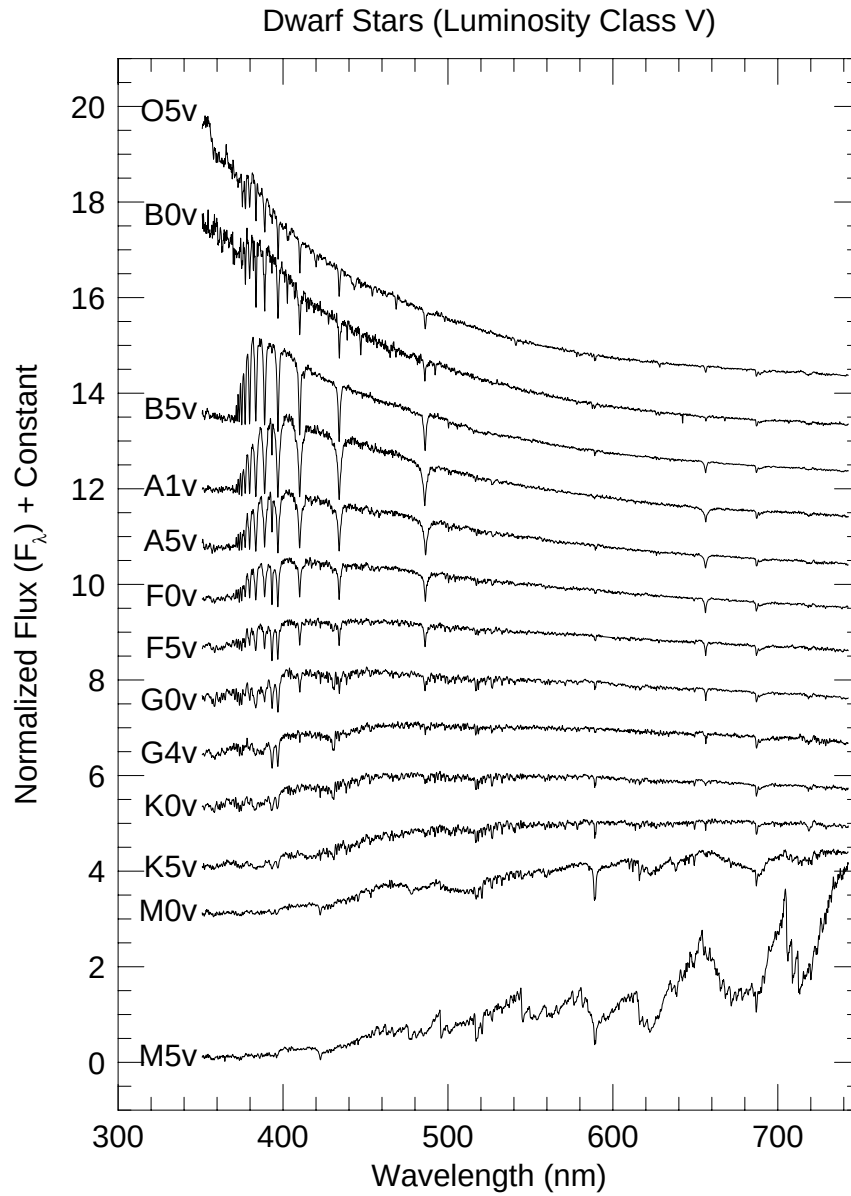


Abbildung 6.6: Vergleich der Spektren von O5V bis M5V mit Angabe der wichtigsten Absorptionslinien. Nur A und B Sterne weisen einen Balmersprung auf.

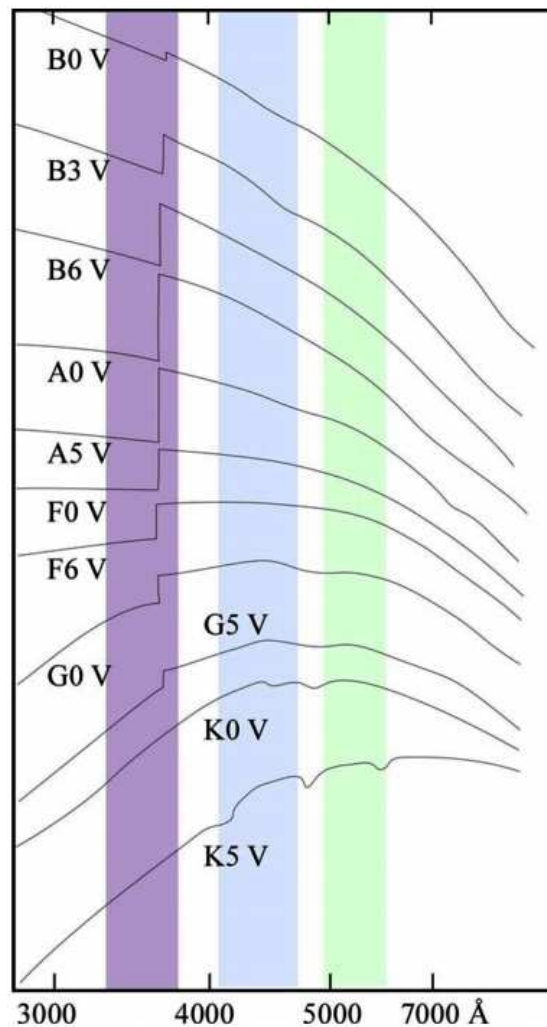


Abbildung 6.7: Globale Sternspektren mit den Filter-Bändern U , B und V .

6.2.3 Hertzsprung–Russell Diagramm (HRD)

Hertzsprung (1904) und H.N. Russell (1913) fanden zum ersten Male einen Zusammenhang zwischen dem Spektraltyp und der absoluten Helligkeit M_V , indem sie in ein Diagramm mit Spektraltyp als Abszisse und M_V als Ordinate alle Sterne eintrugen. Dieses Diagramm wird als Hertzsprung–Russell–Diagramm (HRD) bezeichnet (Abb. 6.11, s. auch Frontseite). Diese Diagramme sind heute fundamental für die Darstellung der Entwicklung der Sterne. Die meisten Sterne bevölkern das enge Band der **Hauptsequenz**, **Main–Sequence**, welche sich diagonal von den hellen blauen B- und A-Sternen über die gelben Sterne bis zu den schwachen roten M-Sternen erstreckt. Rechts oben befindet sich die Gruppe der **Riesensterne** (Giants und Supergiants). Die Unterschiede bei gleichem Spektraltyp beziehen sich auf verschiedene

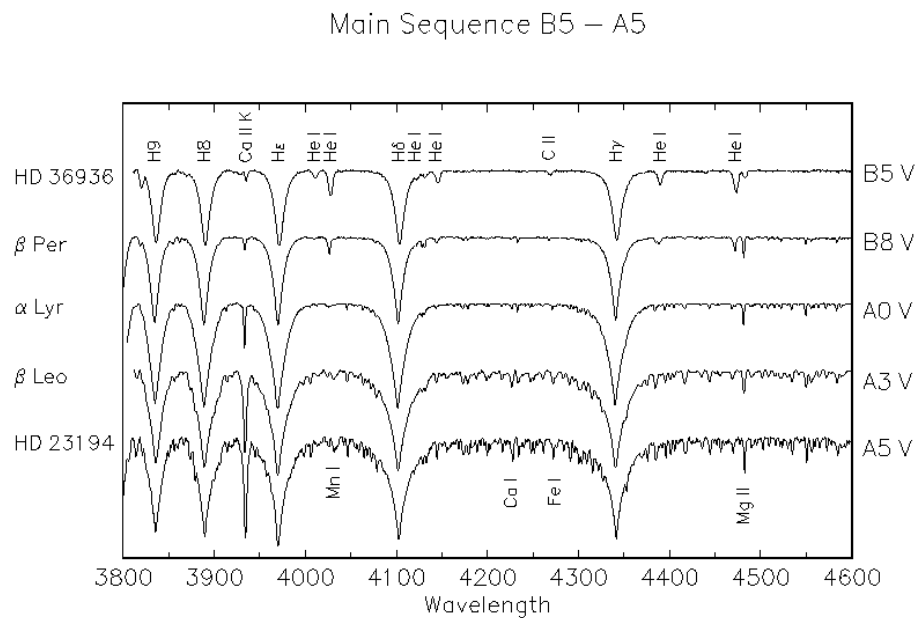
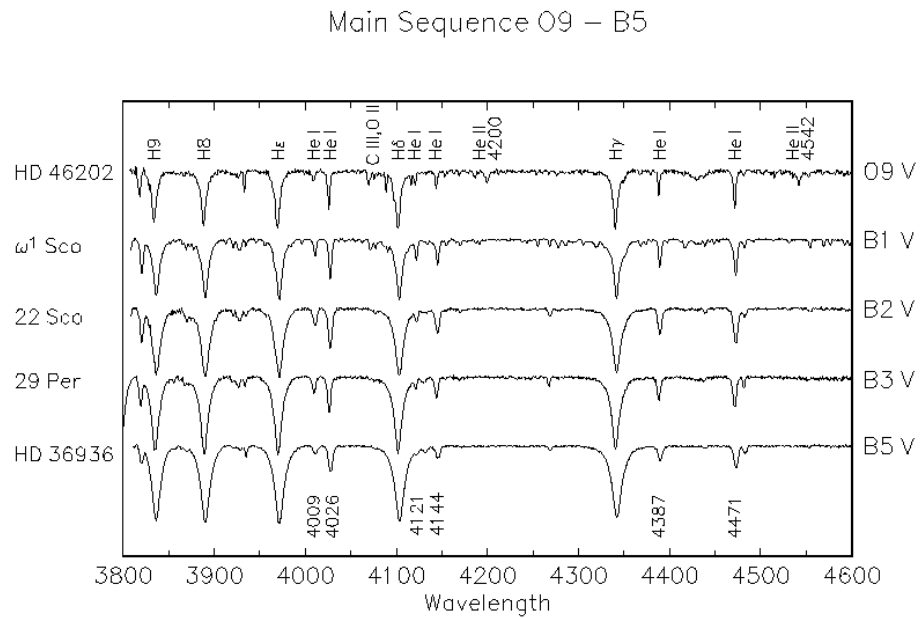


Abbildung 6.8: Vergleichende Spektren von O und B Sternen (oben) und B und A Sternen (unten). Bei B Sternen sind die He I Linien stark ausgeprägt, bei A Sternen die Wasserstofflinien.

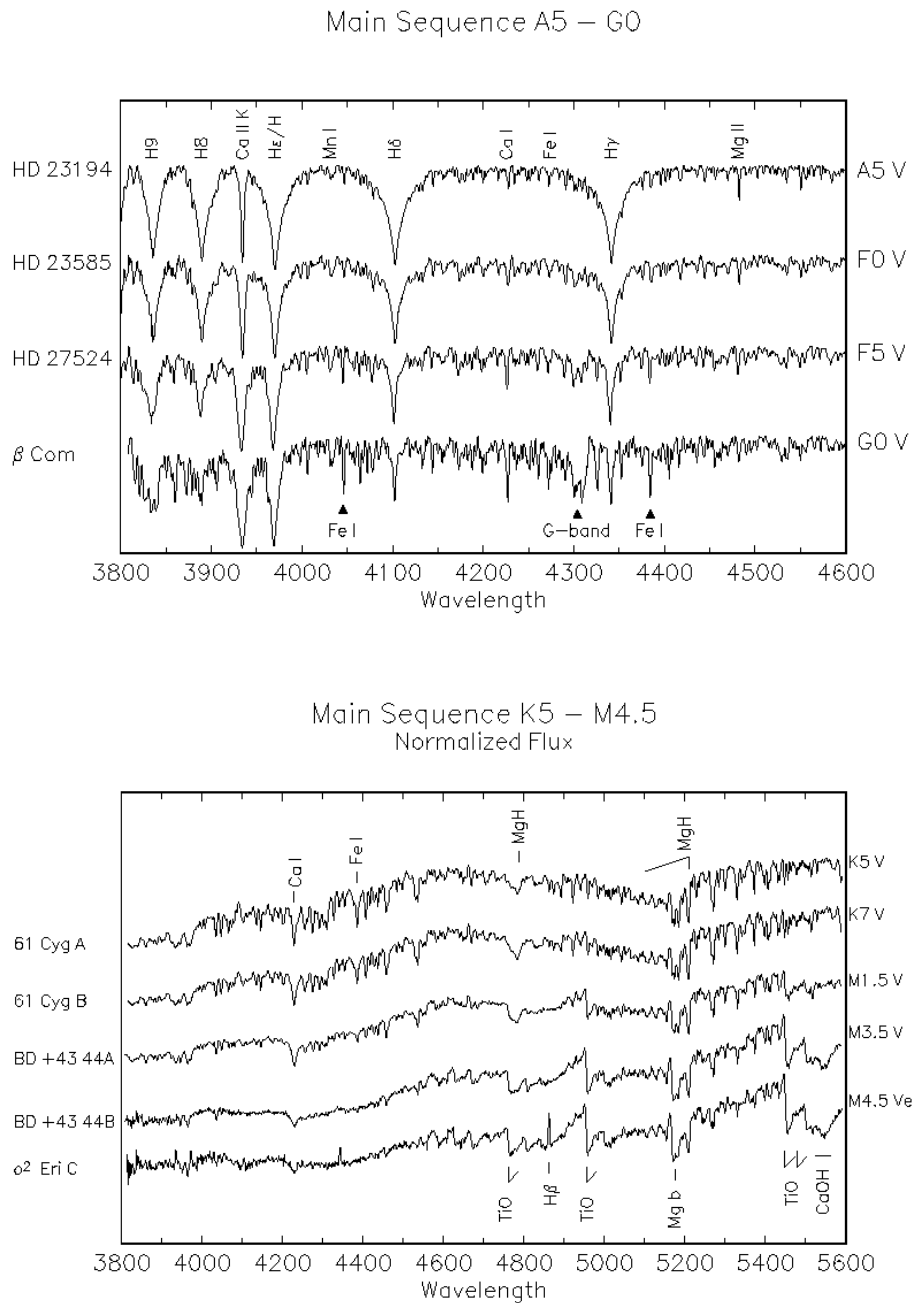


Abbildung 6.9: Vergleichende Spektren von A und F Sternen (oben) und K bis M Sterne (unten). Man beachte das Verschwinden der Wasserstofflinien bei G Sternen und das Auftauchen der TiO-Banden bei M Sternen.

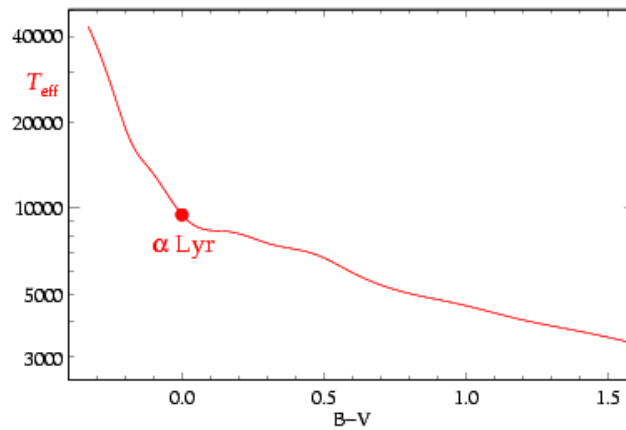


Abbildung 6.10: Die Effektivtemperatur eines Sterns als Funktion des Farbindex.

Radien gegenüber den Zwergsternen (Dwarfs). Die Riesensterne zerfallen nochmals in verschiedene Untergruppen: Der **Horizontalast** bezeichnet eine praktisch horizontale Sequenz mit $M_V \simeq 0,5$; der **rote Riesenast** steigt praktisch vertikal auf bei Spektraltypen K und M; der **asymptotische Riesenast (AGB)** steigt vom Horizontalast auf und endet im hellen Bereich des roten Riesenastes. Diese Äste stellen in der Tat verschiedene Entwicklungsstufen dar (s. später). Insbesondere entsprechen Überriesen Sternen, die in einer Supernova enden werden und möglicherweise einen Neutronenstern als Pulsar erzeugen. Massen mit weniger als $0.01 M_\odot$ enden nie auf der Hauptreihe und werden entweder Braune Zwerge oder Jupiterartige Planeten. Ein typischer Stern auf dem Horizontalast ist ungefähr 100 mal heller als die Sonne. Die hellsten Riesen nennt man **Überriesen (Supergiants)** mit bis zu $M_V = -7$. So hat Betelgeuze im Orion einen Radius von 400 Sonnenradien und ist 20'000 mal heller als die Sonne. Links unten im HRD findet man die **Weißen Zwerge (White Dwarfs)** mit einer Helligkeit von $\simeq 12$. Sie sind recht zahlreich. Der bekannteste ist Sirius B.

6.2.4 Yerkes Leuchtkraftklassen

Das HRD wird nicht gleichmäßig von Sternen bevölkert. Insbesondere ist die Lage eines Sterns im HRD nicht eindeutig durch die Effektiv-Temperatur festgelegt. Dies führte zu einer zusätzlichen Klassifikation (Morgan und Keenan) in Leuchtkraftklassen Ia (Hyperriesen), Ib (Überriesen), II (Helle Riesen), III (Riesen), IV (Unterriesen) und V (Hauptsequenz), sowie VI (Unterzwerge, Subdwarfs), s. Abb. 6.13.

6.2.5 Braune Zwerge und Planeten

Heute muß das HRD um die Braunen Zwerge erweitert werden (man spricht häufig vom Spektraltyp L). Obschon als Sterne klassifiziert, sind Braune Zwerge ('brown dwarfs') eigentlich kosmische Zwitter. Aufgrund ihrer relativ geringen Masse reicht die erzeugte Energie nur für ein schwaches bräunliches Leuchten, das mit dem Auskühlen des Innern dieser Objekte immer schwächer wird. Daher sind Braune Zwerge am leichtesten zu entdecken, wenn sie noch

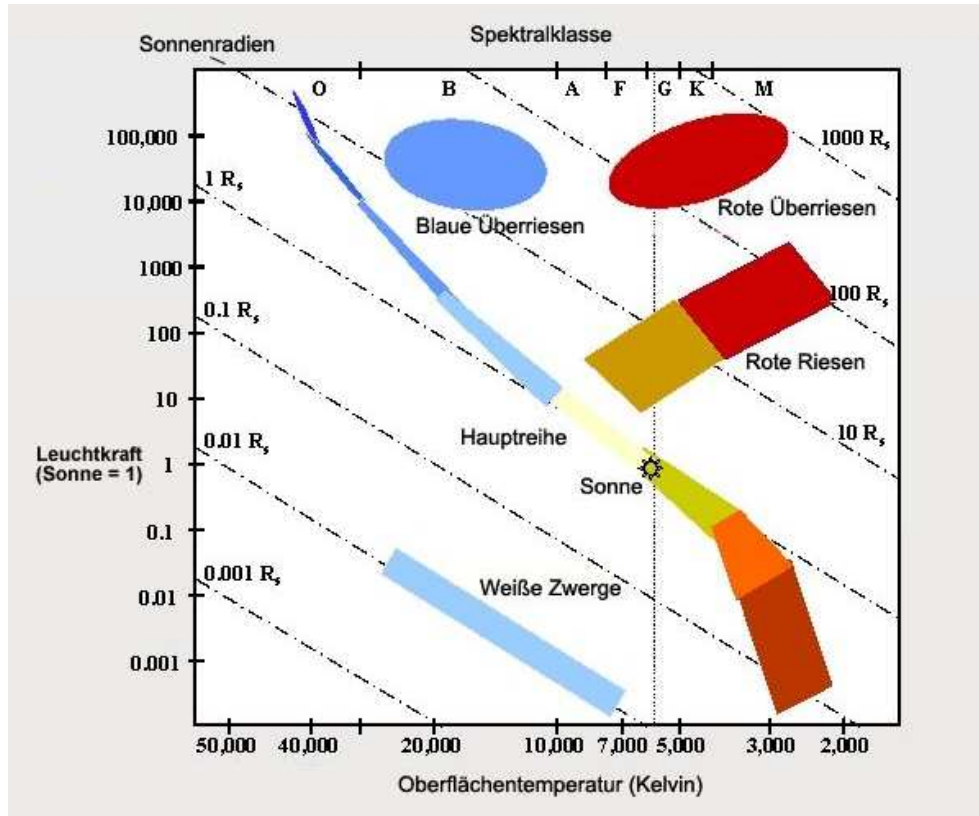


Abbildung 6.11: Das Hertzsprung–Russell-Diagramm (HRD) der Sterne mit der Effektiv-Temperatur als fundamentale Variable (von rechts nach links laufend). Die Helligkeit der Sterne ist in Einheiten der Sonnenleuchtkraft angegeben (links). Die einer Temperatur entsprechenden Spektralklassen sind oben angegeben. Linien konstanten Radius ergeben sich aus dem Stephan-Boltzmann Gesetz. Danach bilden Weiße Zwerge eine Sequenz zu festem Radius. Man beachte, dass unterhalb einer Temperatur von 2500 K keine Sterne mehr zu finden sind, obschon es in diesem kühlen Bereich noch Objekte gibt (Braune Zwerge und Jupiter-artige Planeten).

vergleichsweise jung sind. Das Alter der Braunen Zwerge im Orion–Nebel wird auf höchstens eine Million Jahre geschätzt (Abb. 6.16). Sie besitzen einerseits nicht genug Masse, um die Kernprozesse im Innern zu zünden, d.h. $M < 0,075 M_{\odot}$, sind aber auf der andern Seite deutlich massereicher als Planeten. In diesem Massenbereich kann aber schon Deuterium gezündet werden. Braune Zwerge erwartet man deshalb im Bereich von **13 und 80 Jupitermassen**. Der Massenbereich zwischen etwa 5 und 13 Jupitermassen ist noch unklar.

Die Leuchtkraftentwicklung der massearmen Sterne ist in Abb. 6.15 gezeigt. Neben der Masse ist auch die Leuchtkraft aussagekräftig. Junge Braune Zwerge, so im Alter von 100 Millionen Jahren, schrumpfen ziemlich schnell und die freigewordene Energie macht sie noch ziemlich leuchtkräftig. Doch mit zunehmenden Alter kühlen sie ziemlich rasch ab und die Leuchtkraft nimmt dadurch ab. Wegen der starken Leuchtkraftabnahme geht man jetzt vor allem in offenen Sternhaufen, mit Vorliebe in den Plejaden, auf Braune Zwerge-Jagd, weil

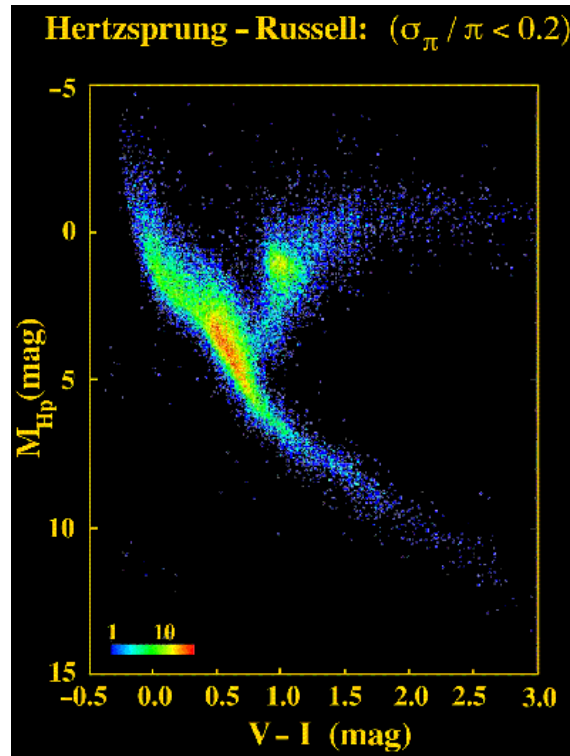


Abbildung 6.12: Das HRD der Sterne unserer Nachbarschaft. Die absoluten Helligkeiten wurden aus den von Hipparcos (1989 – 1993) gemessenen Parallaxen bestimmt (4477 Sterne). Auf dem Riesenast rechts oben sind erstmals sog. Klumpen-Riesen ($M_V \simeq 1$, $B - V = 1.2$ mag) in der Sonnenumgebung nachgewiesen worden. Quelle: Hipparcos Homepage.

die Plejaden jung genug sind und man dort mehr Leuchtkraftstarke Braune Zwerge erwartet. Ein weiterer Vorteil ist, dass man dann auch eine gute Abschätzung des Alters des Braunen Zwerges erhält.

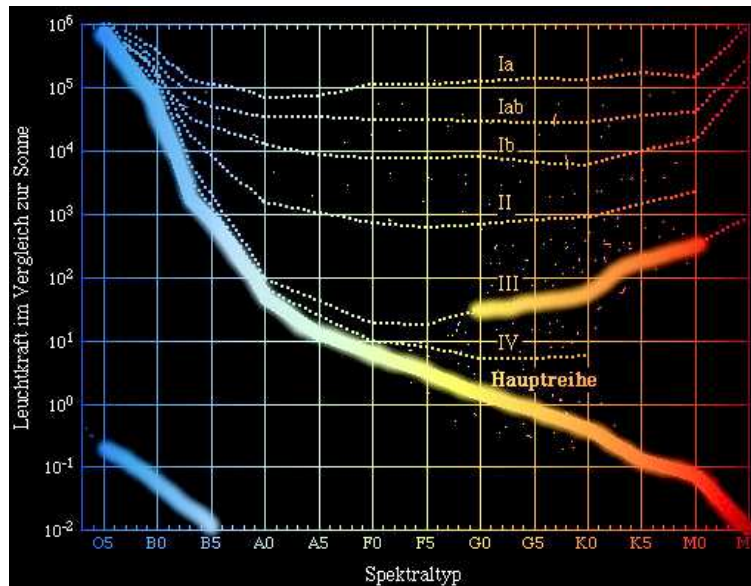
Damit stellt sich die Frage: **Was macht einen Planeten zum Planeten ?**² Antwort:

- Seine Masse (keine Kernfusion)
Sie muß klein genug sein, dass keine Kernfusion, welcher Art auch immer, stattfinden

²IAU Prag 2006: Ein Planet im engeren astronomischen Sinn ist ein Himmelskörper, der (i) sich auf einer Kepler'schen Umlaufbahn um die Sonne bewegt, (ii) dessen Masse groß genug ist, dass sich das Objekt im hydrostatischen Gleichgewicht befindet und somit eine näherungsweise kugelförmige Gestalt besitzt und der (iii) das dominierende Objekt seiner Umlaufbahn ist, d.h. der diese von weiteren Objekten geräumt hat.

Da Pluto die Umgebung seiner Bahn nicht bereinigt hat, ist er nur ein Zwergplanet, ebenso wie Ceres und Eris. Für Planeten und Zwergplaneten jenseits der Neptunbahn war ursprünglich die Bezeichnung Plutonen vorgeschlagen worden, deren Prototyp Pluto gewesen wäre. Weil aber bereits in der Geologie der gleichlautende Fachbegriff Pluton verwendet wird, kam es hinsichtlich dieser Namensgebung zu keiner Einigung.

An der in Prag beschlossenen Planetendefinition regt sich Kritik von Astronomen. Eine Expertenkommission hatte im Vorfeld der Konferenz eine Definition erarbeitet, die eine Erhöhung der Planetenanzahl auf 12 vorsah. Dies hatte zu hitzigen Diskussionen geführt, die zu der schließlichen Kompromissdefinition geführt hatten. Durch die Herabstufung von Pluto müssen Millionen von Büchern umgeschrieben werden.



Luminosity Effects at B1

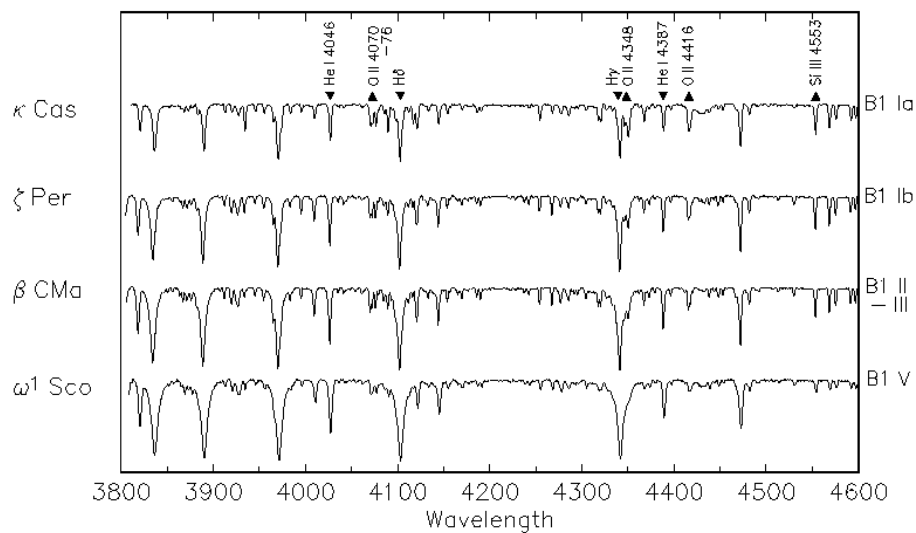


Abbildung 6.13: Leuchtkraftklassen (oben) und vergleichende Spektren von B1 Sternen in den verschiedenen Leuchtkraftklassen (unten).

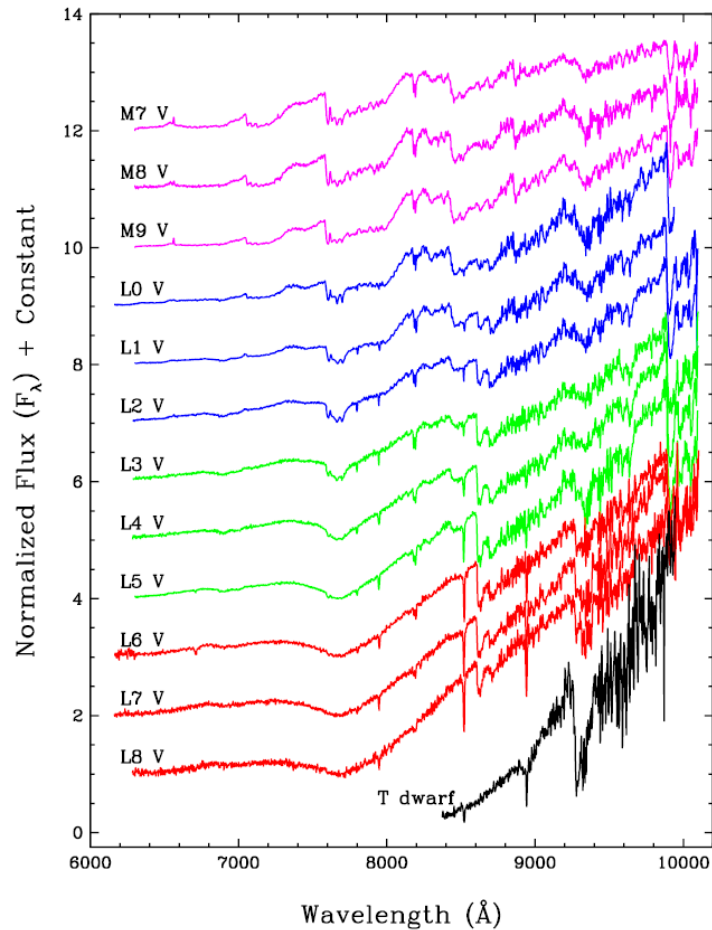


Abbildung 6.14: Optische Spektren von M- und Braunen Zwergen (sog. L Zwerge).

kann. Damit grenzt man ihn einmal von Sternen, bzw. sternähnlichen Objekten ab. Dieser Punkt spielt bei den Extrasolaren Planeten eine ganz wichtige Rolle. Betragen doch die Massen der bis jetzt gefundenen Planeten meistens mehrere Jupitermassen, bis zu maximal 15 Jupitermassen. Diese Grenze stimmt sehr gut mit dem Grenzwert des Deuteriumbrennens überein, die bei etwa 12 Jupitermassen liegt. Da massereiche Planeten einfach zu finden sind, ist die Statistik oberhalb von 10 Jupitermassen wahrscheinlich bereits vollständig.

- Seine Form
Seine Form sollte sphärisch sein, also kein unförmiges (eiförmiges) Objekt. Diese Eigenschaft ist eng mit seiner Masse verbunden. Die Planetenmasse muß groß genug sein, damit die Eigengravitation ausreicht, ihm eine Kugelform zu verpassen.

- Seine Bahn

Der Planet soll seine Sonne direkt umkreisen. Damit grenzt man sämtliche Monde aus. Weiter sind dann noch andere Bahnelemente, wie Exzentrizität und Banneigung von Interesse. Überraschenderweise hat sich herausgestellt, dass die Jupiter-ähnlichen Planeten teilweise sehr hohe Exzentrizitäten aufweisen.

- Andere Eigenschaften, wie seine Atmosphäre, aktive Oberfläche usw.

Da die Planeten lange Zeit unverändert bleiben, sind offenbar alle Kräfte in ihrem Inneren ausbalanciert. Bei einem flüssigen Planeteninneren (von fester Kruste abgesehen) handelt es sich wesentlich um Druckkräfte, welche radial nach außen gerichtet sind und um die zum Zentrum gerichtete Gravitationskraft. Das Gleichgewicht beider nennt man hydrostatisches Gleichgewicht. Wir nehmen dabei eine homogene Kugel mit einer mittleren Dichte an. Das hydrostatische Gleichgewicht lautet

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r) \frac{GM(r)}{r^2} \quad (6.6)$$

mit der Dichte $\rho(r)$ und der Masse $M(r)$ bis zum Radius r . Setzen wir eine konstante Dichte voraus, dann können wir den Zentraldruck abschätzen

$$P_c = \frac{1}{2} \bar{\rho} \frac{GM}{R} \simeq \frac{4}{3} \bar{\rho}^2 \pi G R^2. \quad (6.7)$$

Bei bekannter Masse M und Radius R erhält man Werte des Zentraldruckes, die in etwa um den Faktor 2 vom realen Wert abweichen. Um den Radius für die maximale und minimale Größe zu erhalten, versucht man den umgekehrten Weg, also diese aus dem Zentraldruck herzuleiten. Und da liegt eigentlich schon das Problem. Welchen Zentraldruck nimmt man für ein Objekt, dessen Aufbau nicht bekannt ist. Der maximale Druck ist dadurch gegeben, dass die Atome ab einem Druck von $10^{13} - 10^{14}$ Pa das Gleichgewicht nicht mehr aufrechterhalten können. Umgekehrt kann der Körper ab einem Druck von etwa 10^8 Pa eine sphärische Form annehmen.

Die Hubble-Durchmusterung hat nun ergeben, dass es wie bei Sternen mehr masseärmere als massereiche Braune Zwerge gibt und dass sich dieser Trend bis hinunter zu niedrigen, nahezu planetaren Massen fortsetzt. Dahingehend scheinen die von Hubble entdeckten freifliegenden Braunen Zwerge die kleinsten Gegenstücke zu den hochmassigen Sternen zu repräsentieren, was bedeuten könnte, dass Sterne und Freiläufer auf dieselbe Art entstanden sind. Die Entdeckungen Hubbles zeigen auch die bisher stärksten Hinweise dahingehend, dass die frei umhertreibenden Braunen Zwerge sich völlig von den in letzter Zeit entdeckten Planeten in den Umlaufbahnen anderer Sterne unterscheiden. Braune Zwerge wurden viel häufiger als Einzelgänger als in der Umlaufbahn eines Sterns gefunden. Dies lässt vermuten, dass sich die extrasolaren Planeten völlig anders entwickelt haben im Vergleich zu unserer Sonne und zu anderen Sternen. Bis vor ein paar Jahren glaubte man noch, dass Braune Zwerge nur sehr selten wären, da der Sternbildungsprozess bei niedrigen Massen aufhört zu funktionieren. Tatsächlich aber scheint die Natur nicht zwischen Sternen, die durch Kernfusion in ihrem Innern strahlen und solchen, die dies aufgrund ihrer niedrigeren Masse nicht vermögen, zu unterscheiden. Sie scheint im Gegenteil Braune Zwerge aller Größenklassen, vom sehr massereichen bis zum massearmen hervorzubringen. Die Studie zeigte aber auch, dass die Braunen Zwerge wahrscheinlich kaum zu der sogenannten 'dunklen Materie' beitragen, die die Masse unserer Galaxis und des Universums insgesamt dominiert. Denn obwohl Hubble herausgefunden hat, dass Braune Zwerge reichlich in der Galaxis vorhanden sind, sind sie wohl doch

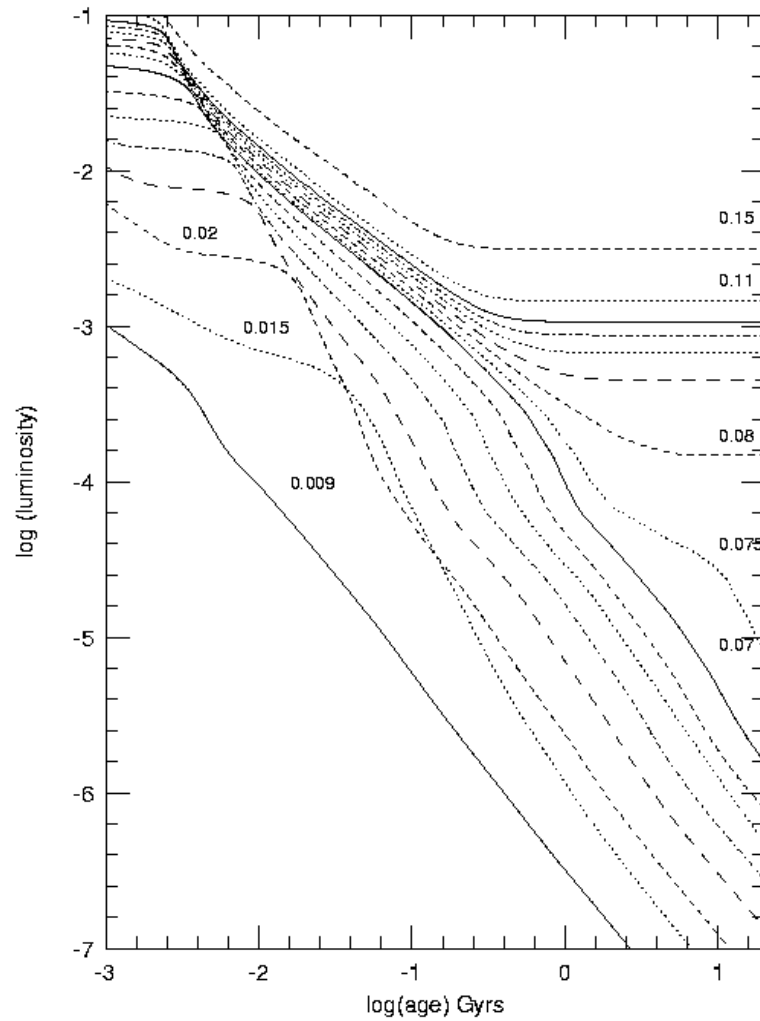


Abbildung 6.15: Dieses Diagramm zeigt die Entwicklung der Leuchtkraft von Sternen mit geringer Masse, Braunen Zwergen und Planeten als Funktion der Zeit in Jahren (logarithmisch). Es wird hier 13 Jupitermassen als Trennlinie zwischen Braunen Zwergen und Planeten angenommen. Die Massen sind rechts neben den Linien in Sonnenmassen angegeben. Die obere Gruppe zeigt die Entwicklung der Leuchtkraft von massearmen Sternen. Nach einem Abfall bleiben sie dann lange Zeit konstant. Bei den Braunen Zwergen, die Gruppe in der Mitte, ist die Leuchtkraft zu Beginn ihrer Laufbahn ähnlich der der massearmen Sterne. Doch nimmt sie mit zunehmenden Alter kontinuierlich ab. Dadurch kann man sie von den massearmen Sternen unterscheiden, zumindest bei älteren Objekten, da die untere Grenze für die Leuchtkraft eines massearmen Sterns bei 10^{-4} Sonnenleuchtkräften liegt. Bei den Planeten, also Objekten unterhalb der 13 Jupitermassengrenze, erfolgt die Leuchtkraftabnahme wie $\propto 1/t$.



Abbildung 6.16: Braune Zwerge im Sternbildungsgebiet des Trapezes im Orion. Links: optische Aufnahme, rechts: Infrarot-Aufnahme. Quelle: HST Press Release.

nicht so häufig vertreten, um mit ihnen die dunkle Materie zu erklären. Man schätzt, dass die Braunen Zwerge weniger als 0,1 % zur Gesamtmasse des Milchstraßenhalos beitragen.

7 Aufbau der Sterne

Mit den Augen eines Physikers betrachtet sind Sterne heiße Gaskugeln, die durch ihre Eigengravitation zusammengehalten werden. Energie und Druck im Innern resultieren aus Kernreaktionen, hauptsächlich aus der Fusion von Wasserstoff in Helium, die den Stern vor dem Kollaps bewahren. Dieses relativ einfache System durchläuft wohl definierte Phasen. Es beginnt mit der Kondensation aus dem interstellaren Gas und endet, wenn die Kernenergie aufgebraucht ist, entweder als Weißer Zwerg, Neutronenstern oder Schwarzes Loch.

Prähistorische Studien an der Erde zeigen, dass sich die Sonne in den letzten 4 Milliarden Jahren nicht drastisch verändert hat. Dies folgt auch aus einer Energiebilanz. Es sei E_n die gesamte Energie, die abgestrahlt werden kann. Dann ist die Entwicklung des Sterns durch die nukleare Zeitskala τ_n bestimmt

$$\tau_n = \frac{E_n}{L}, \quad (7.1)$$

wenn L die Leuchtkraft des Objektes bezeichnet. Die meisten Sterne beziehen ihre Energie aus der Fusion von ${}^1\text{H}$ in ${}^4\text{He}$ mit einem Energiegewinn von

$$Q_n = 6,3 \times 10^{18} \text{ erg g}^{-1} = 6,3 \times 10^{14} \text{ J/kg}. \quad (7.2)$$

Würde die Sonne nur aus Wasserstoff bestehen, so entspräche dies einem Energiereservoir von $Q_n M_\odot = 1,25 \times 10^{45} \text{ J}$. Damit beträgt die nukleare Entwicklungszeit für die Sonne $\tau_n = 3 \times 10^{18} \text{ s} \simeq 10^{11} \text{ Jahre}$. Sterne mit Massen von $10 - 20 M_\odot$ entwickeln sich viel schneller, da $L = 10^5 L_\odot$. Damit beträgt ihre Entwicklungszeit nur einige Millionen Jahre.

7.1 Gleichgewichtsbedingungen und Grundgleichungen

Die Gleichgewichtsbedingungen für den Aufbau eines Sterns bestehen aus vier Differentialgleichungen für die Masse $m(r)$, den Gasdruck $P(r)$, Energieproduktion $L(r)$ und den Energietransport im Stern, der die Temperaturverteilung $T(r)$ bestimmt.

7.1.1 1. Massenverteilung

Die erste Gleichung beschreibt die Masse $m(r)$, die sich innerhalb einer Massenschale mit Radius r befindet

$$\Delta m = 4\pi r^2 \rho(r) \Delta r \quad (7.3)$$

oder differentiell

$$\boxed{\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho} \quad (7.4)$$

ρ bezeichnet die Massendichte.

7.1.2 2. Das hydrostatische Gleichgewicht

Die zweite Gleichung bezeichnet das hydrostatische Gleichgewicht

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}} \quad (7.5)$$

Die nach außen wirkenden Druckkräfte werden durch die nach innen gerichtete Gravitationsanziehung ausgeglichen.

7.1.3 3. Energieproduktion

Die in der Massenschale produzierte Energie beträgt

$$\Delta L = \epsilon(r) m(r) dr = 4\pi r^2 \rho (\epsilon - \epsilon_\nu) \Delta r, \quad (7.6)$$

wenn ϵ die pro Masse und pro Zeiteinheit produzierte Energie bezeichnet. Damit gilt differentiell

$$\boxed{\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho (\epsilon - \epsilon_\nu)} \quad (7.7)$$

In den meisten Fällen wird die Energie im zentralen Kern erzeugt, so dass L im äußeren Bereich konstant ist. Diese Energieproduktion ϵ ist i.a. eine Funktion der Dichte, der Temperatur und der chemischen Zusammensetzung des Sternmaterials.

7.1.4 4. Energietransport und Temperaturverteilung

Die vierte Gleichung beschreibt den Temperaturverlauf im Sterninnern, der von der Art des Energietransports abhängt: Strahlung, Konvektion und Wärmeleitung. Letzterer Prozeß ist sehr ineffizient, da die Elektronen sich nur über sehr kurze Distanzen bewegen können.

Radiativer Energietransport: Der Energietransport durch Strahlung hängt wesentlich von der Opazität κ im Sterninneren ab (s. Diffusionsnäherung des Strahlungstransports), $\kappa = \kappa(\rho, T, X) \equiv \kappa_R$, X bezeichnet die chemische Zusammensetzung,

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa \rho}{T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2}}, \quad (7.8)$$

da der radiale Strahlungsfluß $F_r = L(r)/4\pi r^2$. Zusammen mit dem hydrostatischen Gleichgewicht erhalten wir so, $L_r = L(r)$,

$$\frac{dT/dr}{dP/dr} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa L_r}{mT^3}. \quad (7.9)$$

Wir führen nun den radiativen Temperaturgradienten ein (dimensionslos)

$$\nabla_{\text{Rad}} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{Rad}} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa L_r P}{mT^4}, \quad (7.10)$$

womit sich der Temperaturgradient schreiben lässt als

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{T}{P} \frac{Gm\rho}{r^2} \nabla_{\text{Rad}}, \quad (7.11)$$

oder als

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{T}{P} \frac{Gm}{4\pi r^4} \nabla_{\text{Rad}}. \quad (7.12)$$

Die Größe ∇ beschreibt die Temperaturverteilung in Abhängigkeit von der Druckverteilung

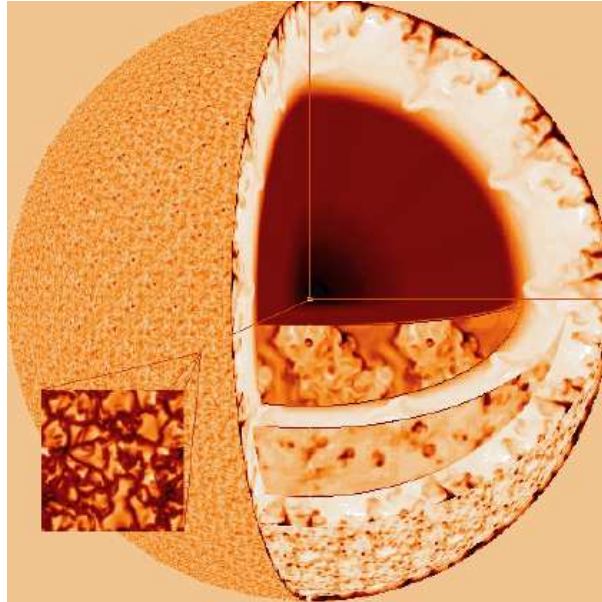


Abbildung 7.1: Die Konvektionszone der Sonne mit Oberflächengranulation. Im zentralen Bereich der Sonne wird die Energie radiativ transportiert, in der Hülle jedoch konvektiv. Die Konvektionszellen erscheinen als Granulation an der Oberfläche. Eine Granule lebt typisch 10 Minuten.

in einer Schichtung. Die Skalenhöhe des Drucks ist damit auch ein Maß für die Änderung der Temperatur mit der Höhe. Den Temperaturgradienten können wir auch schreiben als

$$\nabla_{\text{Rad}} = \frac{1}{4} \frac{3P}{aT^4} \frac{\kappa L_r}{4\pi c Gm(r)}. \quad (7.13)$$

Der erste Faktor ist das Verhältnis von Gesamtdruck P zu Strahlungsdruck, und der zweite bezeichnet das Verhältnis der lokalen Leuchtkraft L_r zur lokalen Eddington–Leuchtkraft L_r^{ED} . Diese bedeutet, dass die lokale Gravitationskraft gerade durch den Strahlungsdruck ausgeglichen würde

$$\frac{Gm(r)}{r^2} = \frac{\kappa L_r^{\text{ED}}}{4\pi cr^2}, \quad L_r^{\text{ED}} = \frac{4\pi Gcm(r)}{\kappa}. \quad (7.14)$$

Der radiative Temperaturgradient kann deshalb stark ansteigen, wenn die Energieproduktion zum Zentrum hin konzentriert ist (massereiche Sterne).

Wenn der Energietransport durch Strahlung ineffizient wird, bildet sich ein starker Temperaturgradient aus. Dadurch ergeben sich Gasbewegungen, die nun die Energie effizienter transportieren als die Strahlung. In diesem *Konvektionsprozeß* gelangt heißes Gas in kühleren Regionen, wo es die Energie abgibt und damit wieder sinkt.

Energietransport durch Konvektion: Wir betrachten ein konvektives Element mit Exzeßtemperatur DT gegenüber der Umgebung. Dieses Element bewegt sich radial mit einer Geschwindigkeit v_c , bleibt jedoch im Druckgleichgewicht mit der Umgebung, $DP = 0$. Dies erzeugt nun einen lokalen Energiefluß von

$$F_{\text{kon}} = \rho v_c C_P DT. \quad (7.15)$$

Ein solches Element bewegt sich über eine Distanz l_m , bevor es sich wieder mit der Umge-

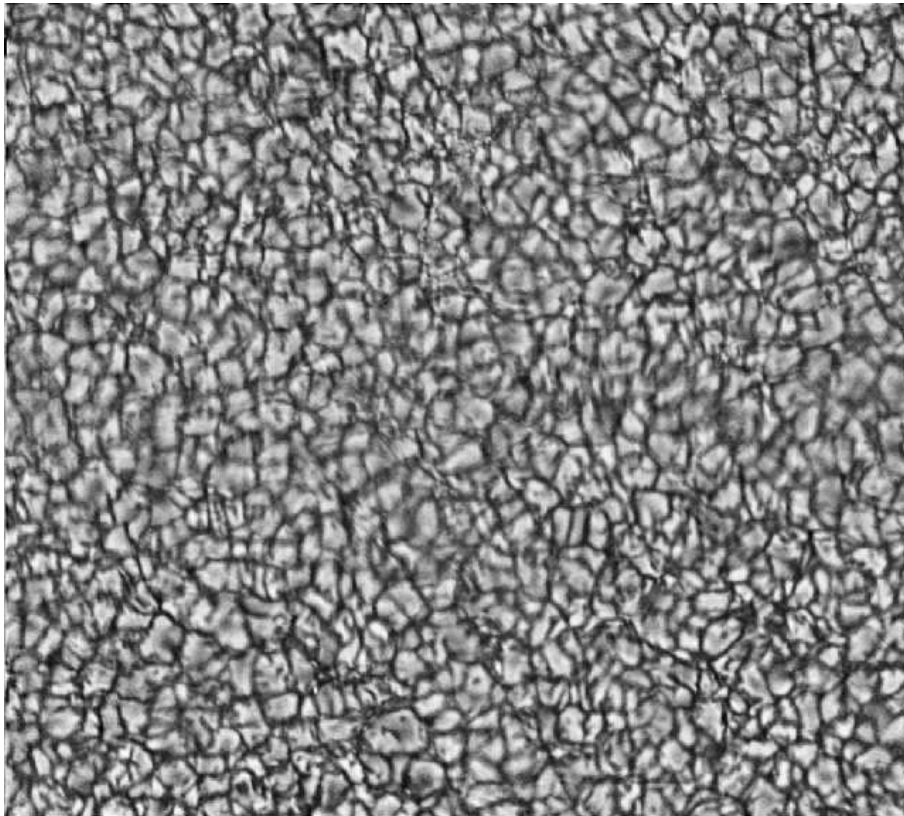


Abbildung 7.2: Die Granulation der Oberfläche. Die hellen Gebiete sind aufsteigende Gaselemente, die dunklen Gebiete absteigende. Die Ausdehnung dieser Granulen beträgt typischerweise etwa 1000 km, die Konvektionsgeschwindigkeiten zwischen 1 bis 2 km/s.

bung vermischt. Diese Länge heißt Mischungsweg, der in etwa durch die Skalenhöhe H_P der

Druckverteilung bestimmt ist

$$H_P^{-1} = \frac{dP}{P dr} \quad , \quad l_m = \alpha H_P \quad , \quad \alpha \simeq 1. \quad (7.16)$$

Der Temperaturgradient für die konvektive Phase folgt aus dem adiabatischen Temperaturgradienten, da heiße Materie adiabatisch (ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung) aufsteigt und abgekühlte absteigt, $P = K \rho^\Gamma$, $T \propto P/\rho \propto \rho^{\Gamma-1}$

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}} \quad (7.17)$$

$\Gamma = C_P/C_V$ ist der adiabatische Exponent, der vom Ionisationszustand des Gases abhängt ($\Gamma = 5/3$ für einatomige Gase). In diesem Falle folgt ebenfalls

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{T}{P} \frac{Gm}{4\pi r^4} \nabla_{\text{ad}} \quad , \quad (7.18)$$

mit dem adiabatischen Temperaturgradienten

$$\nabla_{\text{ad}} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{ad}} = \frac{P \delta}{T \rho C_P} = 1 - \frac{1}{\Gamma} \quad (7.19)$$

mit

$$\alpha \equiv \left(\frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right)_T \quad , \quad \delta \equiv - \left(\frac{d \ln \rho}{d \ln T} \right)_P \quad (7.20)$$

für eine Zustandsgleichung $\rho = \rho(P, T)$. Für ein einatomiges Gas $\Gamma = 5/3$, und deshalb $\nabla_{\text{ad}} = 2/5 = 0,4$, $d\rho/\rho = \alpha dP/P - \delta dT/T$.

7.1.5 Schwarzschild Kriterium

Um herauszufinden, welches der dominante Energietransport ist, benötigt man das **Schwarzschild-Kriterium**:

In einer Schicht, welche die Energie radiativ transportiert, ist der effektive $\nabla = \nabla_{\text{Rad}}$; diese Schicht bleibt dynamisch stabil, solange $\nabla_{\text{Rad}} < \nabla_{\text{ad}}$, sonst wird die Schicht dynamisch instabil und Konvektion setzt ein.

Für Konvektion im Zentrum gilt $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$, während bei Konvektion in Hüllen ∇ zwischen ∇_{ad} und ∇_{Rad} liegt (folgt aus Mischungsweg-Theorie).

Konvektion setzt damit ein, wenn entweder ∇_{Rad} groß wird oder wenn ∇_{ad} gering ausfällt. Im zweiten Falle bedeutet dies, da $\Gamma = 1 + \mathcal{R}/C_V$, dass C_V groß werden muß. Dies ist immer der Fall, wenn viel Energie zum Heizen verschwendet wird, z.B. bei der Ionisierung von H oder He . Die Ionisationsenergie steht damit nicht mehr zur Erhöhung der Temperatur zur Verfügung. Da H bei einer Temperatur von 6000 K ionisiert wird, fällt ∇_{ad} , bis aller H ionisiert wird. Dasselbe gilt für He bei einer Temperatur von 20.000 – 50.000 K. In diesen Temperaturbereichen setzt deshalb Konvektion ein. Umgekehrt setzt Konvektion ebenfalls in den Kernen von massereichen Sternen ein, da hier das CNO-Brennen sehr viel Energie freisetzt. Dies erhöht den radiativen Temperaturgradienten.

7.1.6 5. Zustandsgleichung

Temperatur, Druck und Dichte werden über eine Zustandsgleichung verknüpft. Der Gasdruck selber folgt aus

$$P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T \quad (7.21)$$

mit der Boltzmann-Konstante k und dem mittleren molekularen Gewicht μ . m_H ist die Masse des Wasserstoffatoms, $\mathcal{R}$ die Gaskonstante.

Wir berechnen nun μ für vollständige Ionisation. Ein Atom mit Kernladung Z produziert dann $Z + 1$ freie Teilchen. In der Astrophysik bezeichnet man den relativen Massenanteil von Wasserstoff mit X , den von Helium mit Y und alle schwereren Elemente mit Z , so dass gilt

$$X + Y + Z = 1. \quad (7.22)$$

Damit folgt für das mittlere Molekulargewicht

$$\mu = \frac{1}{2X + 3Y/4 + Z/2}. \quad (7.23)$$

Wasserstoff ergibt zwei Teilchen pro atomare Masseneinheit, Helium drei Teilchen pro vier atomaren Masseneinheiten und die schwereren Elemente im wesentlichen die Hälfte. Für solare Materie gilt $X_\odot = 0.6 - 0.7$, $Y_\odot = 0.24 - 0.4$, $Z_\odot = 1 - X - Y \simeq 0.02$.

Bei höheren Temperaturen muß auch der Strahlungsdruck berücksichtigt werden

$$P_{\text{Rad}} = \frac{1}{3} a T^4. \quad (7.24)$$

Damit kann der totale Druck geschrieben werden als

$$P = P_{\text{Gas}} + P_{\text{Rad}} = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T + \frac{a}{3} T^4. \quad (7.25)$$

Wir definieren weiter

$$\beta \equiv \frac{P_{\text{Gas}}}{P} \quad (7.26)$$

$\beta = 1$ bedeutet verschwindenden Strahlungsdruck, $\beta = 0$ verschwindenden Gasdruck. Daraus erhalten wir die thermodynamischen Beziehungen

$$\rho = \rho(P, T) = \frac{\mu}{\mathcal{R}} \frac{1}{T} (P - \frac{a}{3} T^4) \quad (7.27)$$

und damit

$$\delta = \frac{4 - 3\beta}{\beta}. \quad (7.28)$$

Daraus kann man den allgemeinen adiabatischen Temperaturgradienten herleiten

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{\mathcal{R} \delta}{\beta \mu C_P} = \frac{\beta^2 + (1 - \beta)(4 + \beta)}{\frac{5}{2} \beta^2 + 4(1 - \beta)(4 + \beta)}. \quad (7.29)$$

Für $\beta \rightarrow 1$ folgt $\nabla_{\text{ad}} = 2/5$, für $\beta \rightarrow 0$ gilt $\nabla_{\text{ad}} = 1/4$ (Gas, das durch den Strahlungsdruck dominiert wird).

Entartung: Der Entartungsdruck der Elektronen wird dann wichtig, wenn ihr Phasenraumvolumen minimal wird. Dazu schätzen wir die mittlere Impulsdifferenz zwischen zwei Elektronen in einem Maxwell-Gas ab

$$\Delta p_e = \sqrt{\langle (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 \rangle} = \sqrt{2\bar{p}_1^2} \simeq \sqrt{6m_e k_B \bar{T}} \simeq \sqrt{\frac{12m_e G M \mu m_H}{7R}} \quad (7.30)$$

für $\Gamma = 5/3$. Andererseits gilt für den mittleren Abstand

$$\Delta q_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{\mu_e m_u}{\rho} \right)^{1/3} \simeq \left(\frac{4\mu_e m_u R^3}{M} \right)^{1/3}. \quad (7.31)$$

Damit können wir das Phasenraumvolumen der Elektronen berechnen

$$\begin{aligned} (\Delta q_e \Delta p_e)^3 &\simeq 4\mu_e \left(\frac{12\mu}{7} \right)^{3/2} \left(\sqrt{Gm_e R} m_u^{5/6} M^{1/6} \right)^3 \\ &\simeq 40 \left(1 \times 10^{-26} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/6} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{1/2} \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1} \right)^3 \\ &\simeq 180 h^3 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{3/2} > h^3. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Für einen Stern mit $M = M_\odot$ ist das Phasenraumvolumen der Elektronen nur dann größer als h^3 , wenn $R \geq 3 \times 10^{-2} R_\odot$. Für

$$(\Delta q_e \Delta p_e)^3 \simeq h^3 \quad (7.33)$$

wird das Pauli-Prinzip wichtig, und damit setzt die Entartung der Elektronen ein. **Bei Braunen Zwergen mit $M < 0,08 M_\odot$ und $R < 0,1 R_\odot$ wird deshalb Entartung wichtig.**

Fermionen mit halbzahligem Spin s erfüllen nicht die Maxwell-Verteilung im Gleichgewicht, sondern die Fermi-Verteilung

$$N(E) = \frac{2s+1}{h^3} \frac{1}{\exp[(E - \mu)/k_B T] + 1} \quad (7.34)$$

Im vollständig entarteten Fall gilt deshalb für die Teilchendichte

$$n = \frac{2s+1}{h^3} \int_0^{p_0} 4\pi p^2 dp = \frac{2s+1}{h^3} \frac{4\pi}{3} p_0^3. \quad (7.35)$$

p_0 ist der Impuls zur Fermi-Energie $E = \mu$

$$\mu = \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \quad (7.36)$$

und damit

$$p_0 = h \left(\frac{3n}{4\pi(2s+1)} \right)^{1/3}. \quad (7.37)$$

Es ist nun günstig, die charakteristische Größe $x = p_0/mc$ einzuführen und dadurch die Dichte auszudrücken

$$n(x) = (2s+1) \frac{4\pi}{3} \left(\frac{m_e c}{h} \right)^3 x^3. \quad (7.38)$$

Daraus lässt sich der isotrope Druck $P = P(x)$ berechnen

$$P(x) = \frac{1}{3} \frac{2s+1}{h^3} \int_0^{p_0} 4\pi p v(p) p^2 dp = (2s+1) \frac{\pi}{6} \left(\frac{m_e c}{h} \right)^3 m_e c^2 f(x) \quad (7.39)$$

mit $f(x)$ gegeben als

$$f(x) = x \sqrt{x^2 + 1} (2x^2 - 3) + 3 \ln(x + \sqrt{1 + x^2}). \quad (7.40)$$

Zeige, dass für Elektronen gilt $P_e \propto n^{5/3}$, falls $x \ll 1$ (nichtrelativistische Elektronen) und $P_e \propto n^{4/3}$, falls $x \gg 1$ (relativistische Elektronen).

Die Zustandsgleichung für ein ideales entartetes Elektronengas ist damit durch eine polytrope Zustandsgleichung gegeben

$$P = K \rho^\Gamma \quad (7.41)$$

mit $\Gamma = 5/3$ für nicht-relativistische Elektronen und $\Gamma = 4/3$ für relativistische Elektronen. Die Konstante K ist allein durch Naturkonstanten bestimmt

$$K = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e m_u^{5/3} \mu_e^{5/3}} = \frac{1.0036 \times 10^{13}}{\mu_e^{5/3}} \text{ cgs}, \quad \Gamma = \frac{5}{3}, \quad (7.42)$$

$$K = \frac{3^{1/3} \pi^{2/3}}{4} \frac{\hbar c}{m_u^{4/3} \mu_e^{4/3}} = \frac{1.2435 \times 10^{15}}{\mu_e^{4/3}} \text{ cgs}, \quad \Gamma = \frac{4}{3}. \quad (7.43)$$

Ähnliche Ausdrücke gelten auch für Neutronen im entarteten Zustand.

Wenn die Elektronen entartet sind, so gilt $P = P_e$. Der Übergang findet statt, wenn

$$\frac{k}{\mu m_H} \rho T = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{\rho}{\mu_e m_e} \right)^{5/3}. \quad (7.44)$$

Dies bedeutet, dass Entartung eintritt, falls

$$\frac{T}{\rho^{2/3}} = 1,207 \times 10^5 \frac{\mu}{\mu_e^{5/3}} (cgs) \quad (7.45)$$

Dies entspricht einer Geraden mit Steigung $2/3$ im $\log \rho - \log T$ Diagramm (Abb. 7.3).

Strahlungsdruck spielt in der heutigen Sonne keine Rolle, ebenso die Entartung nicht. Diese wird jedoch wichtig bei der weiteren Entwicklung der Sonne und ebenfalls bei sehr massearmen Sternen und Braunen Zwergen.

7.1.7 6. Stellare Opazitäten

Der radiative Energietransport hängt wesentlich von den Opazitäten ab. Diese werden durch folgende Prozesse bestimmt:

Elektronstreuung: Photonen können immer an freien Elektronen streuen. Die Thomson Streuung ist unabhängig von der Frequenz

$$\kappa_\nu = \frac{8\pi}{3} \frac{r_e^2}{\mu_e m_u} = 0,20 (1 + X) \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}. \quad (7.46)$$

Diese Thomson Streuung vernachlässigt den Impulsaustausch zwischen Strahlung und Elektron.

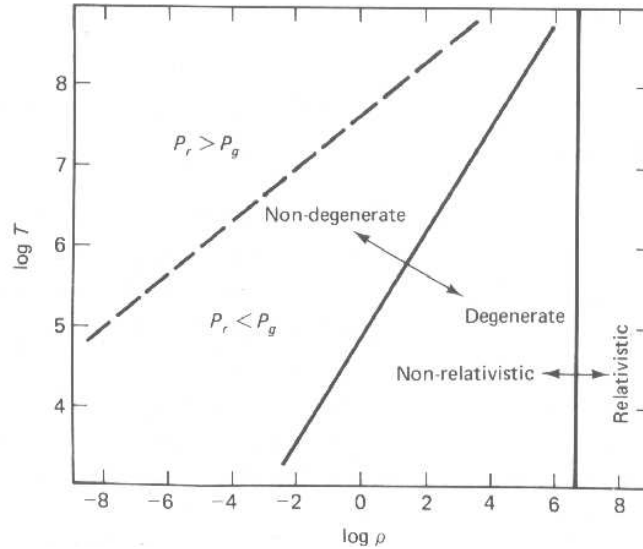


Abbildung 7.3: Die Zustandsebene eines stellaren Gases (in cgs). Strahlungsdruck dominiert oberhalb der punktierten Linie, die Entartung setzt rechts von der ausgezogenen Linie ein ($\mu_e = 2$).

Absorption durch frei–frei Übergänge: Diesen Fall haben wir bereits diskutiert. Die Rosseland–Mittelung ergibt die sog. **Kramersche Opazität**

$$\kappa_{ff} = 3,68 \times 10^{22} (1 + X)(X + Y + B) \rho T^{-7/2} g_{ff} \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}. \quad (7.47)$$

Der Faktor $1 + X$ berücksichtigt die Elektronendichte, B berücksichtigt die schwereren Elemente, $B = \sum X_i Z_i^2 / A_i$.

Gebunden–frei Übergänge: Ein Photon mit Energie $h\nu > \chi_0$ größer als die Ionisationsenergie χ_0 kann ein Atom ionisieren. Die Absorptionskoeffizienten der Atome $a_\nu \propto \nu^{-3}$ für $\nu > \chi_0/h$. Damit folgt für die entsprechende Rosseland Opazität

$$\kappa_{bf} = X(1 - x)\bar{\kappa}(T) \quad (7.48)$$

mit x als dem Ionisationsgrad und $\bar{\kappa} \rightarrow 6 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$, wenn $T > 100.000 \text{ K}$. Für Temperaturen $T < 10^6 \text{ K}$ tragen auch gebunden–gebunden Übergänge bei, jedoch nicht mehr als ein Faktor 2.

Das H^- Ion: Wasserstoff kann wesentlich zur Opazität beitragen bei geringen Temperaturen durch Bildung von negativen Ionen. Ein Wasserstoffatom kann durch Nachbarladungen polarisiert werden und dadurch ein weiteres Elektron binden. Dadurch können Photonen mit Energien $h\nu > 0,75 \text{ eV}$ absorbiert werden, d.h. mit Wellenlängen $< 1,655 \mu\text{m}$ (Infrarotphotonen). Die Photonenenergie geht in die Ionisation und kinetische Energie des Elektrons. Die Opazität ist proportional zu $n_- \propto n_e n_H$, da H^- sich aus neutralem Wasserstoff und

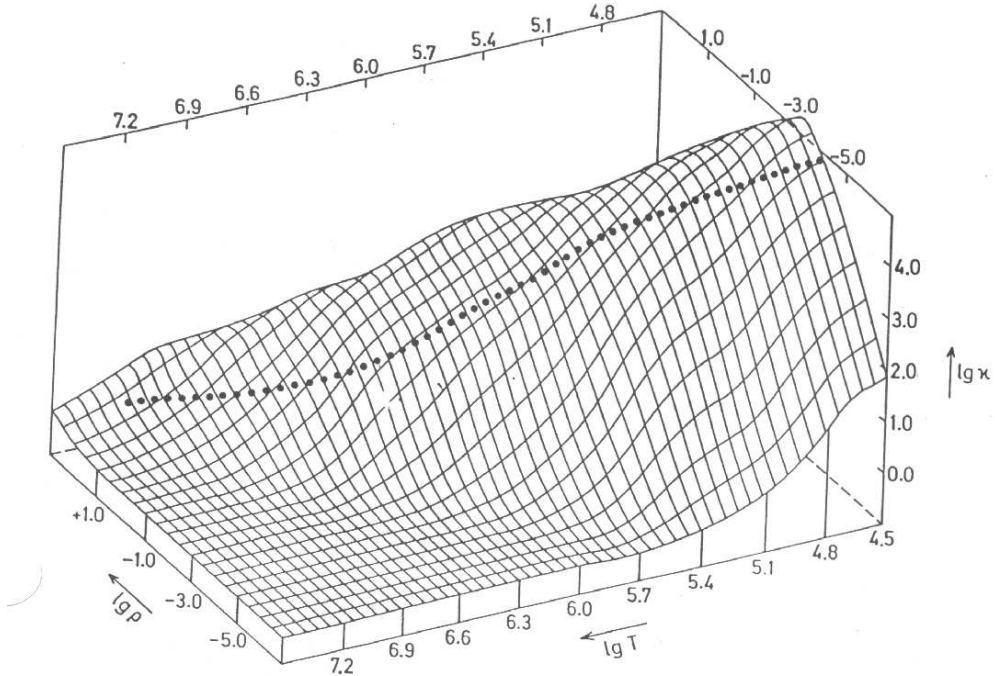


Abbildung 7.4: Die Opazität als Funktion der Dichte und Temperatur im Innern von Sternen (in $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$). Bei hohen Temperaturen und geringen Dichten überwiegt die Elektronstreuung (flach). Mit abnehmender Temperatur gewinnen die frei-frei Prozesse. Bei hohen Dichten wird die Opazität durch die Wärmeleitung reduziert, wodurch der sog. kappa-Berg entsteht. Die Punkte entsprechen einem Sonnenmodell mit $X = 0,690$, $Y = 0,289$, $Z = 1 - X - Y = 0,021$.

Elektronen bilden. Diese Elektronen können von schwereren Atomen stammen, die niedrige Ionisationspotentiale aufweisen (einige eV). Der Metallgehalt von kühlen Atmosphären (3000 – 5000 K) hat deshalb einen großen Einfluß auf die Opazität.

Wenn Wärmeleitung wichtig wird, so ist die gesamte Opazität gegeben durch

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_{\text{Rad}}} + \frac{1}{\kappa_{\text{con}}} \quad (7.49)$$

Dies führt zu einer Reduktion der Opazität, $\kappa_{\text{con}} \propto \rho^{-2} T^2$, bei hohen Dichten. Dadurch entsteht ein Maximum in κ bei fester Temperatur (Abb. 7.4).

Opazitäten können nach dem Los Alamos Code berechnet werden. $\kappa(\rho, T)$ ist eine ziemlich komplexe Funktion (Abb. 7.4). Das horizontale Plateau entsteht durch den Beitrag der Elektronstreuung bei hohen Temperaturen. Mit zunehmender Dichte steigt die Opazität aufgrund von frei-frei Prozessen und erreicht ein Maximum, wenn Wärmeleitung wichtig wird. Opazitäten für die Sternatmosphären sind in Abb. 7.5 dargestellt. Das Sonnenmodell startet mit $\log T_{\text{eff}} = 3,76$ und $\log \rho = -6,73$. Die Opazität nimmt schnell nach innen zu durch die Ionisierung von Wasserstoff, die Elektronen zur H^- -Bildung erzeugt. Ein Maximum wird erreicht, wenn ein großer Teil von Wasserstoff ionisiert ist. Zunächst spielen gebunden-frei

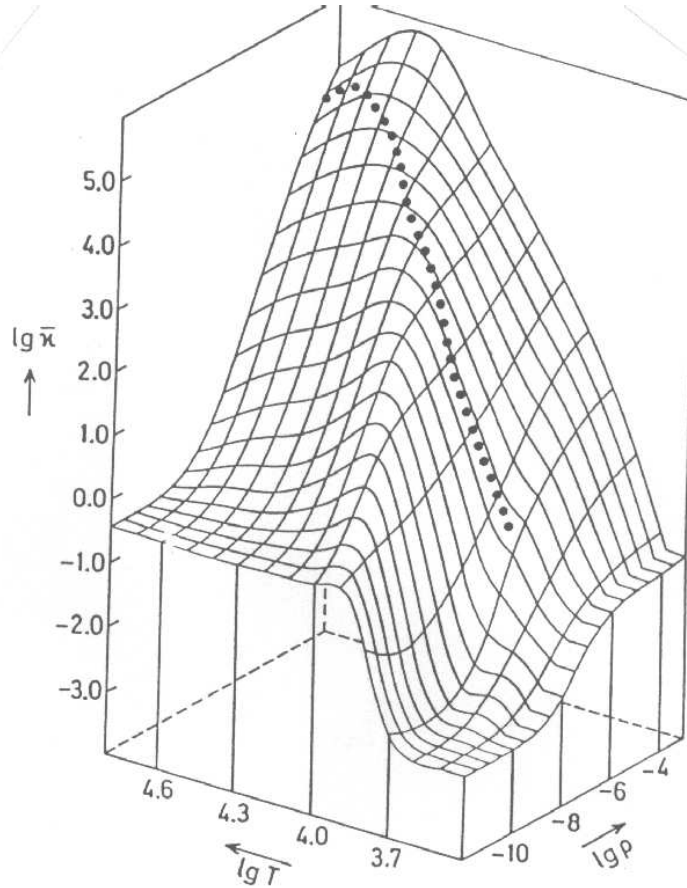


Abbildung 7.5: Das Rosselandmittel der Opazität in Sternatmosphären als Funktion der Dichte ρ (in g cm^{-3}) und der Temperatur T . $X = 0,739$, $Y = 0,240$. Die Punkte entsprechen einem Sonnenmodell.

Übergänge eine Rolle und dann frei–frei Prozesse (Abb. 7.4).

7.1.8 Kelvin–Helmholtz–Zeit

Virialsatz: Aus dem hydrostatischen Gleichgewicht kann man eine wichtige Beziehung zwischen der Gravitationsenergie und der inneren Energie herleiten. Wir betrachten dazu die potentielle Gravitationsenergie eines Sterns der Masse M und mit Radius R

$$\begin{aligned}
 W &= - \int_0^R \frac{Gm(r)}{r} \rho 4\pi r^2 dr \\
 &= \int_0^R \frac{dP}{dr} 4\pi r^3 dr \\
 &= -3 \int_0^R P 4\pi r^2 dr.
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

Unter Annahme einer *adiabatischen Zustandsgleichung* der Form

$$P = K \rho^\Gamma \quad (7.51)$$

mit K und Γ const, folgt aus dem 1. Hauptsatz für die innere Energie $\mathcal{E}$

$$d\left(\frac{\mathcal{E}}{\rho}\right) = -P d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (7.52)$$

der Ausdruck

$$\mathcal{E} = \rho c^2 + \frac{P}{\Gamma - 1}. \quad (7.53)$$

Damit gilt für die totale innere Energie U eines Sterns

$$U = \int_0^R (\mathcal{E} - \rho c^2) 4\pi r^2 dr \quad (7.54)$$

der *Virialsatz*

$$\boxed{W = -3(\Gamma - 1) U.} \quad (7.55)$$

Dies kann auch für die Gesamtenergie E des Sterns formuliert werden

$$E = W + U = -\frac{3\Gamma - 4}{3(\Gamma - 1)} |W|. \quad (7.56)$$

Hier zeigt sich bereits ein Problem: für $\Gamma = 4/3$ gilt $E = 0$! Da $W \simeq -GM^2/R$, wird die Gesamtenergie immer negativer, wenn der Radius kleiner wird, d.h. der Stern muß kollabieren für $\Gamma > 4/3$ und solange keine innere Energiequelle eingeschaltet wird. Damit stellt sich die Frage, ob ein solches kaltes Objekt beliebig weit kollabieren kann. Die Antwort ist nein.

Gase im Innern der Sterne sind voll ionisiert, so dass der Gasdruck folgt

$$P = \frac{\rho}{\mu m_u} k_B T \quad (7.57)$$

m_u ist die atomare Masseneinheit und μ das molekulare Gewicht

$$\frac{1}{\mu} = (Y_e + Y_i) \frac{m_u}{m_B}, \quad \mu_e = \frac{m_B}{m_u Y_e}, \quad (7.58)$$

wenn $Y_e = Z/A$ die Elektronenzahl pro Baryon ist und $Y_i = n_i/n$ die Konzentration des Ions i ($\mu = 1/2$ für reinen Wasserstoff). Damit gilt für die Massendichte

$$\rho = (n_e + \sum_i n_i) \mu m_u. \quad (7.59)$$

Damit können wir die potentielle Energie des Sterns auch schreiben als

$$-W = 3 \int_0^R P 4\pi r^2 dr = \frac{3k_B \bar{T}}{\mu m_u} \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = \frac{3M}{\mu m_u} k_B \bar{T}. \quad (7.60)$$

$\bar{T}$ ist die mittlere Sterntemperatur.

Wenn sich ein Stern mit der Zeit verändert, so muß die totale Energie erhalten bleiben

$$\frac{dE}{dt} + L = 0. \quad (7.61)$$

Da

$$E = \frac{\zeta - 1}{\zeta} W, \quad \zeta = 3(\Gamma - 1), \quad (7.62)$$

folgt für die Leuchtkraft

$$L = (\zeta - 1) \frac{dU}{dt} = -\frac{\zeta - 1}{\zeta} \frac{dW}{dt}. \quad (7.63)$$

Für ein ideales Gas folgt $L = -\dot{W}/2 = \dot{U}$, d.h. **die Hälfte der Energie, die im Kollaps frei wird, kann abgestrahlt werden, die andere Hälfte heizt den Stern auf.** Trotz Energieverlust heizt sich also ein kontrahierender Stern auf! (negative spezifische Wärme!)

Damit können wir eine charakteristische Zeitskala definieren, die sog. Kelvin–Helmholtz–Zeit

$$\tau_{\text{KH}} \simeq \frac{GM^2}{2RL} = 1,6 \times 10^7 a \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \frac{L_{\odot}}{L} \frac{R_{\odot}}{R}. \quad (7.64)$$

Noch Anfang des Jahrhunderts dachte man, dass die Sterne ihre Energie nur aus der inneren Energie beziehen. Diese reicht jedoch nicht aus, um die lange Lebensdauer der Sterne zu erklären.

7.2 Thermonukleare Energieproduktion in Sternen

In den 30er Jahren entdeckte man, dass die stellare Energie aus Fusionsenergie stammt. 1938 postulierten Hans Bethe und von Weizsäcker den CNO–Zyklus, der jedoch für die Sonne nicht wichtig ist. Erst 1950 wurden die pp–Prozesse diskutiert, die bei niedrigen zentralen Temperaturen entscheidend sind. Fusionsprozesse laufen bis zum Element Eisen (Fe) mit Gewinn ab (Abb. 7.6).

7.2.1 Die pp–Kette

In Sternen mit Massen von einer Sonnenmasse oder weniger läuft die ppI–Kette, die aus folgenden Subprozessen besteht:

- $^1H + ^1H \rightarrow ^2D + e^+ + \nu_e + 1,44 \text{ MeV}$ (14 Mia. a)
- $^2D + ^1H \rightarrow ^3He + \gamma + 5,49 \text{ MeV}$ (6 Sekunden)
- $^3He + ^3He \rightarrow ^4He + 2^1H + 12,85 \text{ MeV}$ (1 Mio. Jahre)

In der Abb. 7.7 sind alle möglichen Äste der pp–Kette zusammengestellt. Die ppIII–Kette ist energetisch nicht wichtig, sie erzeugt jedoch energiereiche Neutrinos. Da die Neutrinos entweichen, geht diese Energie für die Heizung verloren.

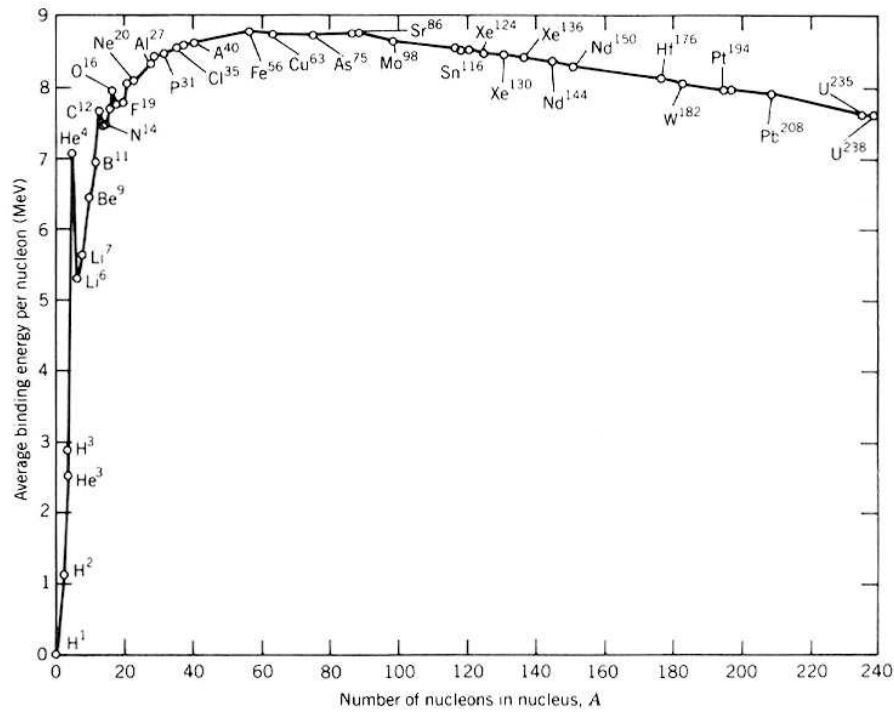


Abbildung 7.6: Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Massenzahl A .

7.2.2 CNO-Zyklus

Bei höheren Temperaturen treten Resonanzreaktionen bei schwereren Kernen auf (die kinetische Energie der eingefangenen Nukleonen stimmt mit der Energie eines angeregten Zustandes überein). Der Kohlenstoffzyklus ist durch folgende Reaktionen gekennzeichnet:

- $^{12}\text{C} + ^1\text{H} \rightarrow ^{13}\text{N} + \gamma$ (1 Mio. a)
- $^{13}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu$ (14 min)
- $^{13}\text{C} + ^1\text{H} \rightarrow ^{14}\text{N} + \gamma$ (0,3 Mio. Jahre)
- $^{14}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{15}\text{O} + \gamma$ (300 Mio. a)
- $^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu$ (82 s)
- $^{15}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^4\text{He}$ (10000 Jahre)

Es wird damit ein He-Kern aufgebaut, während C, O und N sich im Prozeß nicht ändern.

7.2.3 Die Triple-Alpha Reaktion

Bei Temperaturen $T \simeq 100$ Mio. K kann He in C umgewandelt werden

$$^8\text{Be} + ^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C} + 2\gamma + 7,6 \text{ MeV} \quad (7.65)$$

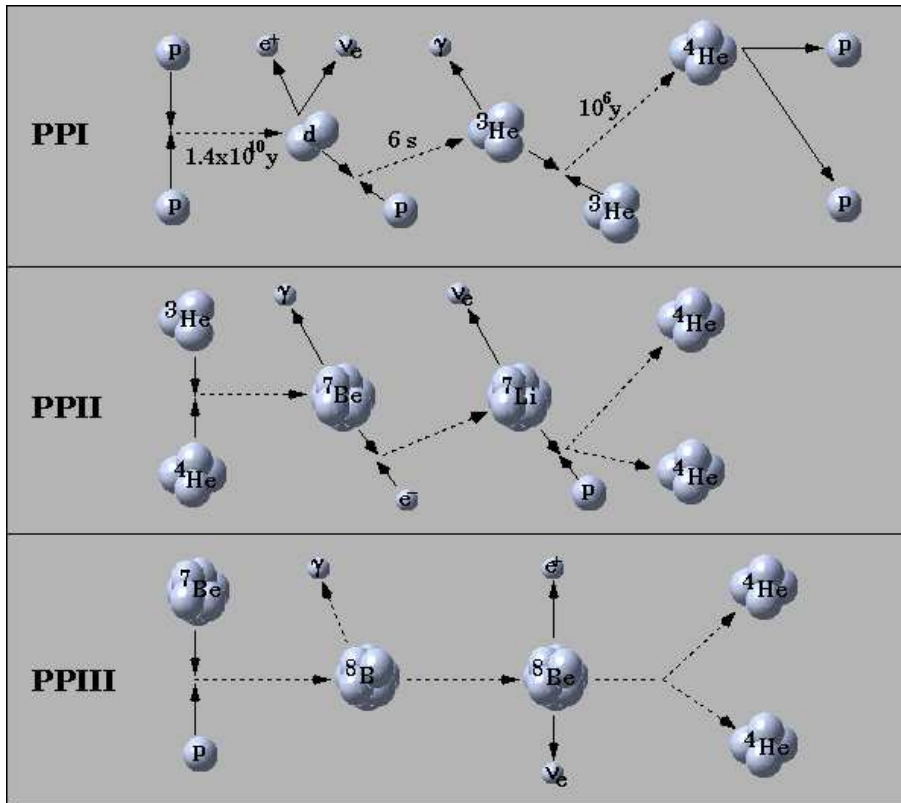


Abbildung 7.7: Proton-Proton-Ketten im Sterninneren.

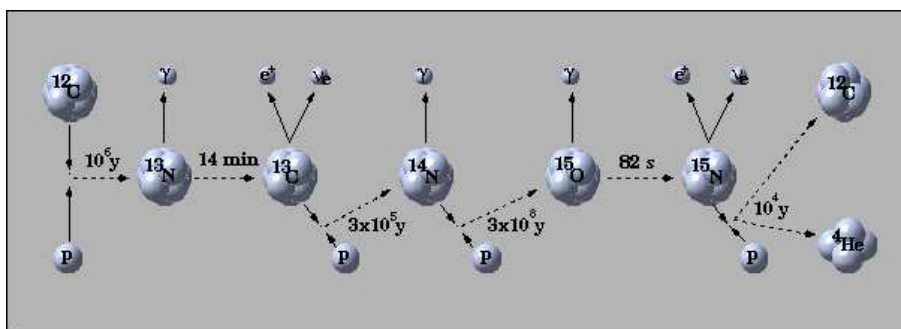


Abbildung 7.8: CNO Zyklus.

Be ist i.a. instabil und kurzlebig. Durch $\text{He} + \text{He}$ wird jedoch ein geringer Anteil an Be aufgebaut, so dass obige Reaktion ablaufen kann. Diese Reaktion nennt man deshalb Triple-Alpha Reaktion. Dabei resultiert ein Nettoenergiegewinn von 7,4 MeV - 95 keV.

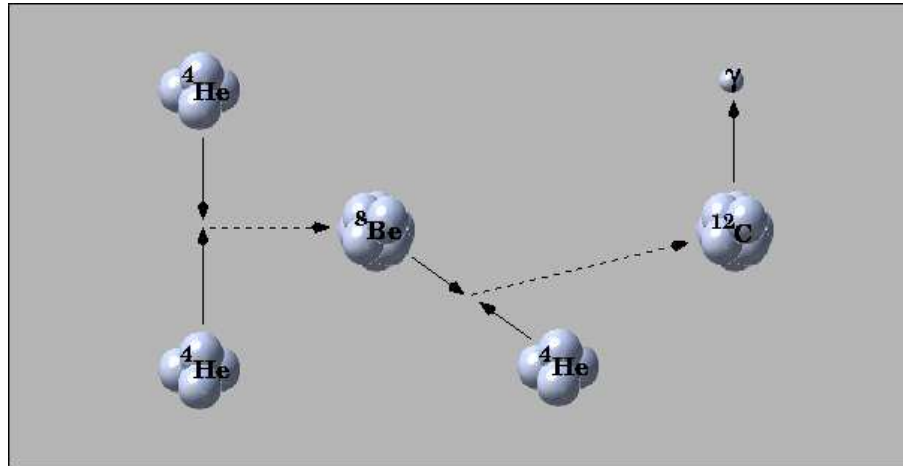


Abbildung 7.9: Triple alpha Process.

7.2.4 Alpha-Reaktionen

Während des Heliumbrennens kann Kohlenstoff zu Sauerstoff umgewandelt werden, etc.

- ${}^{12}\text{C} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{16}\text{O} + \gamma$
- ${}^{16}\text{O} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{20}\text{Ne} + \gamma$
- ${}^{20}\text{Ne} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{24}\text{Mg} + \gamma$

7.2.5 Kohlenstoffbrennen

Wenn Helium im Kern verbrannt ist, kann auch Kohlenstoff reagieren bei Temperaturen über 500 Mio. K.

- ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{24}\text{Mg} + \gamma$
- ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{23}\text{Na} + p$
- ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{20}\text{Ne} + {}^4\text{He}$
- ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{23}\text{Mg} + n$
- ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{16}\text{O} + 2{}^4\text{He}$

7.2.6 Sauerstoffbrennen

Bei noch höheren Temperaturen beginnt Sauerstoffbrennen

- ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{32}\text{S} + \gamma$
- ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{31}\text{P} + p$
- ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{28}\text{Si} + {}^4\text{He}$

- $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{31}\text{S} + n$
- $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{24}\text{Mg} + 2^4\text{He}$

7.2.7 Siliziumbrennen

Schließlich bildet Silizium Nickel und Eisen

- $^{28}\text{Si} + ^{28}\text{Si} \rightarrow ^{56}\text{Ni} + \gamma$
- $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co} + e^+ + \nu_e$
- $^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe} + 2e^+ + 2\nu_e$

Elemente schwerer als Eisen können nicht mehr durch Kernfusion aufgebaut werden (Abb. 7.6), sondern sie entstehen durch Neutroneneinfang und Beta-Zerfall.

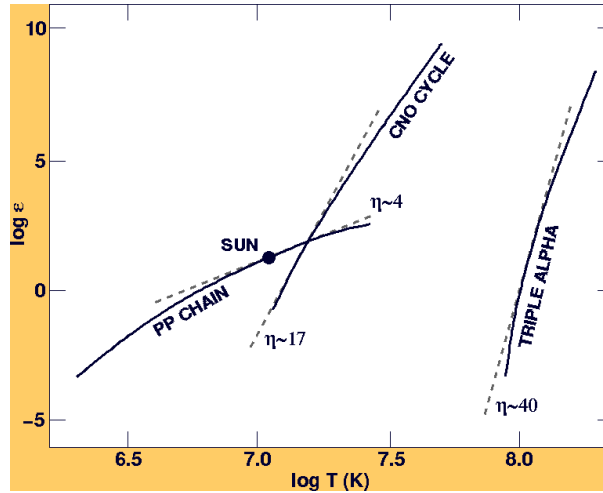


Abbildung 7.10: Energieerzeugungsraten (in $\text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1}$) als Funktion der Temperatur. Unterhalb von 16 Mio. K überwiegt die pp-Reaktion, oberhalb der CNO-Zyklus. Bei Temperaturen um 100 Mio. K setzt die 3α -Reaktion ein.

Die Energieerzeugung in der pp-Kette kann wie folgt geschrieben werden

$$\epsilon_{pp} = 2,38 \times 10^6 \rho X^2 f_{pp} \psi_{pp} C_{pp} T_6^{-2/3} \exp(-33,80/T_6^{1/3}) \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad (7.66)$$

was genähert werden kann zu

$$\epsilon_{pp} = \epsilon_p \rho X^2 \left(\frac{T}{10^6 \text{ K}} \right)^\eta \quad (7.67)$$

mit $\eta \simeq 4$ und $\epsilon_p = 1,07 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^3 \text{ g}^{-2} \text{ s}^{-1}$ (Abb. 7.10). $f_{pp} \simeq 1$ ist der Abschirmfaktor der pp-Kette und $\psi_{pp} \simeq 1$, sowie $C_{pp} \simeq 1$ sind ebenso Korrekturfaktoren. Für den CNO-Zyklus gilt

$$\epsilon_{CNO} = 8,67 \times 10^{27} \rho X X_{CNO} C_{CNO} T_6^{-2/3} \exp(-152,28/T_6^{1/3}) \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad (7.68)$$

wobei X_{CNO} der Massenanteil von C , N und O bedeutet. C_{CNO} ist ein Korrekturfaktor $\simeq 1$. Dies kann im fraglichen Temperaturintervall genähert werden zu

$$\epsilon_{CNO} = \epsilon_c \rho XZ(C, N) \left(\frac{T}{10^6 K} \right)^\eta \quad (7.69)$$

mit $\eta \simeq 16$ und $\epsilon_c \simeq 8.24 \times 10^{-24}$ (cgs). Die 3α Energieerzeugungsraten folgen ebenfalls zu

$$\epsilon_{3\alpha} = 5.09 \times 10^{11} \rho^2 Y^3 T_8^{-3} f_{3\alpha} \exp(-44,027/T_8) \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}. \quad (7.70)$$

Hier ist die Temperatur in Einheiten von 100 Mio. K gegeben. Dies entspricht einer dramatischen Temperaturabhängigkeit, $\epsilon \propto T^{40}$ (Abb. 7.10).

7.3 Sternmodelle im Gleichgewicht

7.3.1 Randbedingungen

Die stationären Sternmodelle werden durch folgenden Satz von Differentialgleichungen beschrieben

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho r^2 \quad (7.71)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \quad (7.72)$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho (\epsilon_n - \epsilon_\nu) \quad (7.73)$$

$$\frac{dT}{dr} = \nabla \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (7.74)$$

$$\rho = \frac{\mu}{\mathcal{R}} \frac{1}{T} \left(P - \frac{a}{3} T^4 \right) \quad (7.75)$$

$$\epsilon_n = \epsilon_n(P, T, X_i) \quad (7.76)$$

$$\epsilon_\nu = \epsilon_\nu(P, T, X_i). \quad (7.77)$$

$\nabla = d \ln T / d \ln P$. Man betrachtet nun Lösungen zu gegebener Masse M und gegebenen Häufigkeiten X_i . Die unabhängige Variable ist r , $0 \leq r \leq R$, bzw. $q = m/M$. Die abhängigen Variablen sind $m = m(r)$, $P = P(r)$, $T = T(r)$ und $L = L(r)$. Die Randbedingungen sind im Zentrum gegeben

$$r = 0 \quad : \quad m = 0 = L, \quad P = P_c, \quad T = T_c. \quad (7.78)$$

Damit bekommt man eine zweiparametrische Schar von Lösungen, die durch die Zentraltemperatur T_c und den Zentraldruck P_c (oder ρ_c) bestimmt sind. Integriert man die Gleichungen von innen nach außen bis $P(R) = 0$ und $T(R) = 0$, so divergieren diese Lösungen i.a. Es gibt innerhalb dieser 2-parametrischen Schar von Lösungen genau eine Lösung, die nicht divergiert. Diese sind in Abb. 7.11 dargestellt.

Dieses Problem der divergierenden Lösungen kann dadurch gelöst werden, dass wir die Integration von innen und von außen starten und dann an einem geeigneten Radius die beiden Lösungen anpassen (z.B. am Rand der Konvektionszone). Für numerische Zwecke ist es deshalb günstig, die Strukturgleichungen in dimensionslose Form zu bringen.

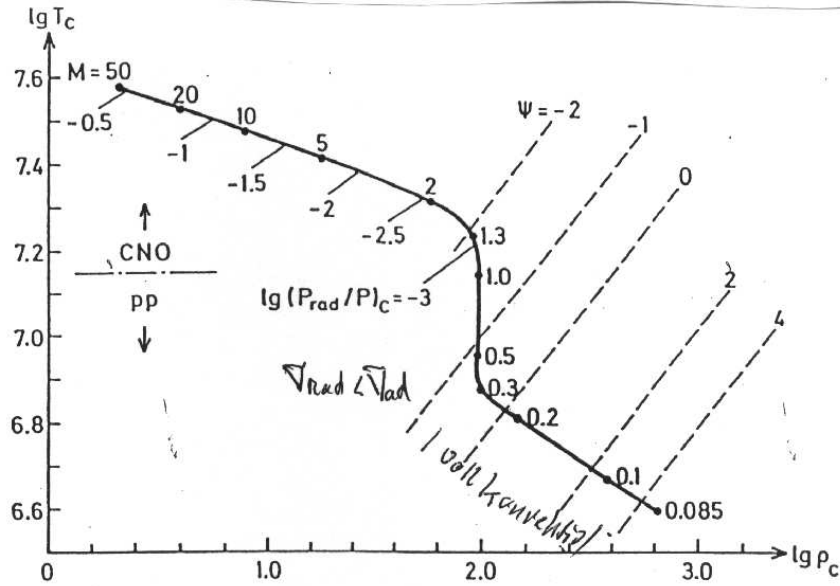


Abbildung 7.11: Lösungen der Strukturgleichungen zu gegebener Zentralkichte ρ_c (in g cm^{-3}). Die Zentralkern-Temperatur ist kein freier Parameter, sondern wird durch die Randbedingungen an der Oberfläche festgelegt. Die Punkte markieren die zugehörigen Massen in Einheiten von $M_\odot$ (von $0,08 M_\odot$ bis $50 M_\odot$). Die Zahlen unterhalb der Lösungskurve geben den logarithmischen Anteil des Strahlungsdruckes am Gesamtdruck wieder.

7.3.2 Dimensionslose Strukturgleichungen: homologe Sterne

Dazu führen wir 2 charakteristische Größen ein

$$P_0 = \frac{GM^2}{4\pi R^4} = 9 \times 10^{14} \text{ dyn cm}^{-2} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{R_\odot}{R} \right)^4 \quad (7.79)$$

und

$$T_0 = \frac{\mu GM}{\mathcal{R} R} = 2 \times 10^7 \text{ K } \mu \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{R_\odot}{R} \right), \quad (7.80)$$

wobei μ das mittlere atomare Gewicht im Stern bezeichnet. Für einen gegebenen Stern sind P_0 und T_0 konstant und bezeichnen den charakteristischen Druck und die charakteristische Temperatur. Damit können wir folgende dimensionslose Variablen definieren

$$x = \frac{r}{R}, \quad q = \frac{m}{M}, \quad f = \frac{L(r)}{L} \quad (7.81)$$

sowie

$$t = \frac{T}{T_0}, \quad p = \frac{P_G}{P_0}. \quad (7.82)$$

Damit kann man die vier Grundgleichungen in folgender dimensionsloser Form schreiben, $\epsilon_n = \epsilon_0 \rho T^\eta$,

$$\frac{dq}{dx} = \frac{p}{t} x^2 \quad (7.83)$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p}{t} \frac{q}{x^2} \quad (7.84)$$

$$\frac{dt}{dx} = -C \frac{f}{x^2} \frac{p^{a+1}}{t^{a+b+4}} \quad (7.85)$$

$$\frac{df}{dx} = D p^2 t^{\eta-2} x^2 \quad (7.86)$$

wenn $\kappa = \kappa_0 \rho^a T^{-b}$. Die Konstanten C und D enthalten Naturkonstanten und die Parameter M , R und L

$$C = C_0 \frac{\kappa_0}{\mu^{b+4}} \frac{LR^{b-3a}}{M^{b+3-a}} \quad , \quad C_0 = \frac{3}{16\sigma} \left(\frac{\mathcal{R}}{G} \right)^{b+4} \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{a+2} \quad (7.87)$$

und

$$D = D_0 \epsilon_0 \mu^\eta \frac{M^{\nu+2}}{LR^{\eta+3}} \quad , \quad D_0 = \left(\frac{G}{\mathcal{R}} \right)^\eta \frac{1}{4\pi} . \quad (7.88)$$

Im adiabatischen Falle gilt

$$p = E t^{5/2} \quad (7.89)$$

mit der Konstanten

$$E = 4\pi K G^{3/2} (\mu/\mathcal{R})^{5/2} M^{1/2} R^{3/2} . \quad (7.90)$$

Die Konstante K folgt aus der adiabatischen Zustandsgleichung.

C_0 und D_0 sind elementare Konstanten, während C , D und E Konstanten für jeden Stern sind und von M , L und R abhängen. Die Randbedingungen sind ebenfalls klar in den neuen Variablen: für $x = 1$: $q = 1$, $f = 1$, $t = 0$ und $p = 0$; für $x = 0$: $q = 0$ und $f = 0$. Wir haben damit 6 Randbedingungen für 4 Unbekannte. Insbesondere kann man mit den 4 Randbedingungen an der Oberfläche die Integration nach Innen starten und findet so Lösungen für gegebene Werte von C und D . Gleichzeitig müssen wir aber auch die beiden Randbedingungen im Zentrum erfüllen. Diese beiden Randbedingungen bestimmen deshalb die Werte von C und D eindeutig. Es gibt nur ein Wertepaar von C und D , welches die inneren Randbedingungen erfüllt. Diese bestimmen damit eine eindeutige Lösung für $q(x)$, $t(x)$, $p(x)$ und $f(x)$. *Wir erhalten damit dieselbe Lösung für alle Sterne im Strahlungsgleichgewicht. C und D sind konstant für alle Sterne, falls $P = P_G$ und für die spezifische Form von ϵ und κ .* Im Falle konvektiver Sterne ersetzt die Konstante E die Konstante C . *Alle konvektiven Sterne haben ein und dieselbe Form der Lösung.* Diese Sterne werden deshalb als *homolog* bezeichnet. Reelle Sterne sind nicht ganz homolog, da sie verschieden tiefe Konvektionsschichten aufweisen. Zudem werden für massereiche Sterne Elektronstreuung und Strahlungsdruck wichtig. Deshalb ist die homologe Approximation besonders gut für A, F, G und B Sterne, da hier die Konvektionsschichten nicht sehr ausgeprägt sind.

7.3.3 Skalierungs-Eigenschaften

Die Eigenschaften der Sternstruktur-Gleichungen erlauben einfache Skalierungen, um z.B. die Masse-Leuchtkraftbeziehung herauszuarbeiten. Man kann dabei alle Werte auf die Werte der Sonne beziehen. So gilt etwa für den Zentraldruck im Stern

$$\frac{P_c(M)}{P_{c\odot}} = \frac{GM^2/R^4}{GM_\odot^2/R_\odot^4} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R_\odot}{R}\right)^4. \quad (7.91)$$

Da die optische Tiefe der Sterne sehr hoch ausfällt, diffundieren die Photonen langsam aus dem Zentrum an die Oberfläche. Sei ℓ die mittlere freie Weglänge der Photonen im Innern der Sterne und N die Anzahl der Streuungen, dann gilt

$$N = \frac{3R^2}{\ell^2} \quad (7.92)$$

und entsprechend für die Diffusionszeit

$$t = \frac{N\ell}{c} = \frac{3R^2}{\ell c}. \quad (7.93)$$

So beträgt in der Sonne die mittlere freie Weglänge $\ell = 0,5$ cm, und die Photonen streuen $N \simeq 10^{24}$ mal. Dazu benötigen sie eine Zeit von $\simeq 3 \times 10^4$ Jahren. Wesentlich ist nun die Skalierung der mittleren freien Weglänge mit der mittleren Dichte $\bar{\rho}$ und Temperatur

$$\ell \propto T^{3,5}/\bar{\rho}, \quad M \leq M_\odot \quad (7.94)$$

und für massereiche Sterne (Thomson-Streuung)

$$\ell \propto 1/\bar{\rho}. \quad (7.95)$$

Damit können wir die Leuchtkraft L berechnen

$$L = \frac{u_{\text{Rad}} V}{t} \simeq \frac{\ell c}{3R^2} \frac{4}{c} \sigma_{SB} T^4 \frac{4\pi R^3}{3} \propto \ell R T^4. \quad (7.96)$$

Andererseits folgt aus dem hydrostatischen Gleichgewicht

$$P \propto \frac{GM^2}{R^4} \propto \bar{\rho} T, \quad (7.97)$$

so dass wir für die Temperatur erhalten

$$T \propto \frac{P}{\bar{\rho}} \propto \frac{M}{R}. \quad (7.98)$$

Damit gilt

- für massearme Sterne, $M \leq 3M_\odot$,

$$L \propto \ell R T^4 \propto M^{5,5}/R^{0,5} \quad (7.99)$$

- für massereiche Sterne, $M > 3M_\odot$,

$$L \propto \frac{RT^4}{\bar{\rho}} \propto M^3. \quad (7.100)$$

Als gute Näherung dient der Vergleich

$$L = L_{\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^4. \quad (7.101)$$

Aus Abb. 7.12 ist ersichtlich, dass diese Skalierung in einem gewissen Bereich sehr gut erfüllt ist. Aus dieser Beziehung erhalten wir auch die Skalierung der Lebensdauer der Sterne als

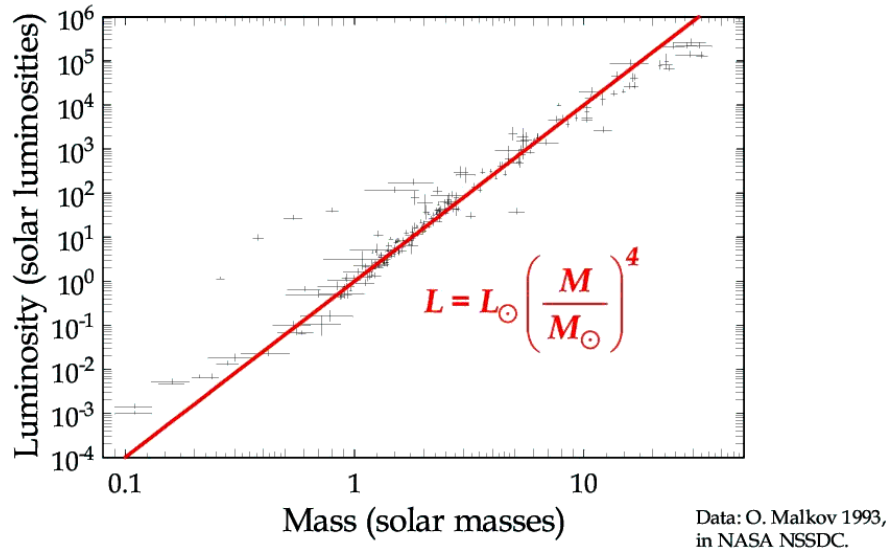


Abbildung 7.12: Die Masse–Leuchtkraft Beziehung der beobachteten Sterne im Vergleich zur fundamentalen Skalierung. Extrem massearme Sterne verhalten sich wie $L = 10^{-3} L_{\odot} (M/0.1M_{\odot})^{2.2}$, massereiche eher wie $L \propto M^3$.

Funktion ihrer Massen, $t_* = \Delta E/L$ mit $\Delta E \simeq 0.003Mc^2$ als Energievorrat im pp–Kanal. Danach gilt

$$t_* = t_{\odot} (M_{\odot}/M)^3. \quad (7.102)$$

Dabei ist $t_{\odot} = 12$ Mia. Jahre die Lebensdauer der Sonne, bevor sie als Weißer Zwerg endet. Im Vergleich zur Sonne durchlaufen Sterne mit höherer Masse die einzelnen Stadien sehr rasch.

Masse–Radius Beziehung: Die Core–Region eines Sterns ist praktisch isotherm, $T \simeq \text{const.}$ Da $T \propto M/R$, bedeutet dies

$$R = R_{\odot} (M/M_{\odot}). \quad (7.103)$$

Im Bereich um eine Sonnenmasse ist diese Skalierung sehr gut erfüllt (Abb. 7.13).

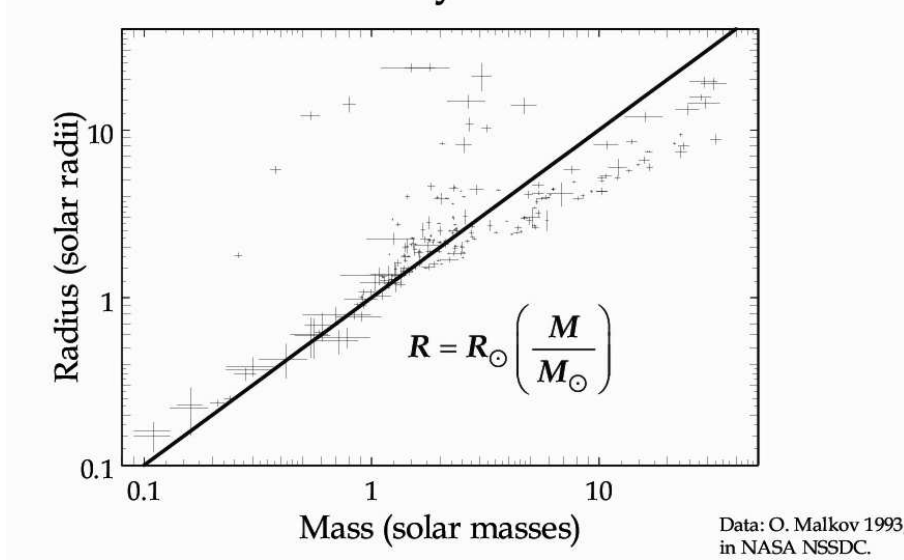


Abbildung 7.13: Sternradien als Funktion der Masse im Vergleich zur theoretischen Skalierung. Bei $M > 10 M_{\odot}$ skaliert der Radius $\propto \sqrt{M}$.

Temperatur–Masse Beziehung: Da einerseits $L = 4\pi R^2 \sigma_{SB} T_e^4$ und andererseits die Skalierung gilt $L \propto M^4$, so folgt daraus

$$4\pi R^2 \sigma_{SB} T_e^4 \propto M^4 \quad (7.104)$$

oder die Effektiv–Temperatur als Funktion der Masse (Abb. 7.14).

$$T_e = T_{e\odot} \sqrt{M/M_{\odot}}. \quad (7.105)$$

Leuchtkraft als Funktion der Effektiv–Temperatur: Mit obiger Beziehung kann auch die Leuchtkraft als Funktion der Effektiv–Temperatur ermittelt werden (Abb. 7.14)

$$L \propto M^4 \propto T_e^8, \quad (7.106)$$

oder

$$L = L_{\odot} (T_e/T_{e\odot})^8. \quad (7.107)$$

In der Tat folgt die untere Hauptreihe ganz gut dieser Beziehung, während die obere Hauptreihe nicht ganz so steil von der Effektiv–Temperatur abhängt.

7.3.4 Randwerte

Die zentralen Werte müssen an die beobachtbaren Werte Leuchtkraft L und Radius R angeglichen werden. Es stellt sich die Frage, die Oberfläche zu finden. Diese ist durch die *Photosphäre* definiert, deren optische Tiefe

$$\tau = \int_R^{\infty} \kappa \rho dr = \bar{\kappa} \int_R^{\infty} \rho dr = 2/3 \quad (7.108)$$

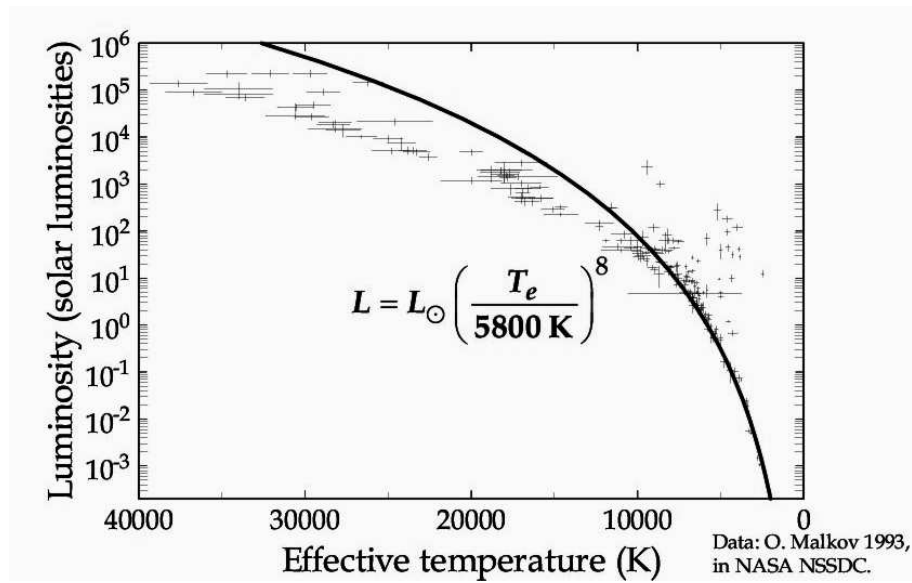
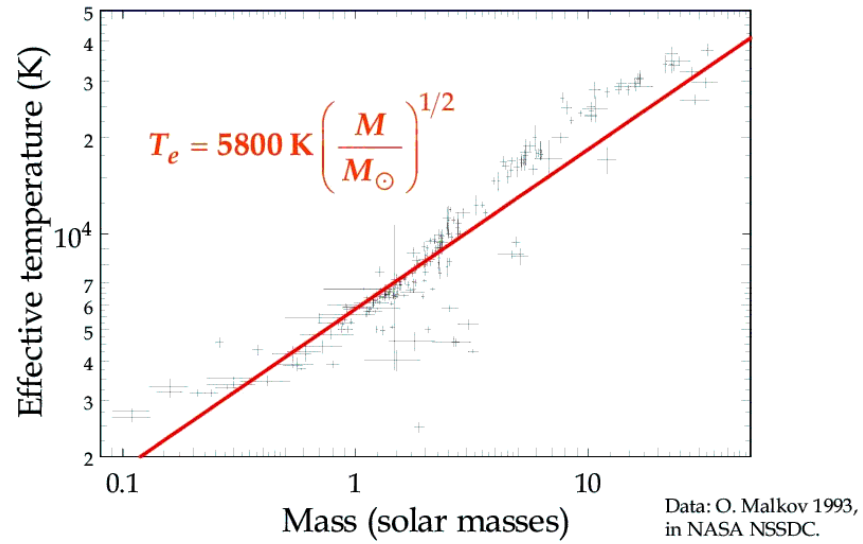


Abbildung 7.14: Die Effektiv-Temperatur als Funktion der Masse im Vergleich zur theoretischen Skalierung (oben) und die Leuchtkraft als Funktion der Effektiv-Temperatur (unten). Bei $M > 10 M_\odot$ wird die Leuchtkraft jedoch konstant und erreicht einen Wert von etwa 52.000 K.

beträgt. An der Oberfläche ist zudem die Gravitation konstant, $g_* = GM/R^2$. Dann gilt für den Druck

$$P_* = \int_R^\infty g \rho dr = g_* \int_R^\infty \rho dr \quad (7.109)$$

Zusammen mit (7.108) folgt deshalb

$$P_* = \frac{GM}{R^2} \frac{2}{3} \frac{1}{\bar{\kappa}}. \quad (7.110)$$

Die Temperatur der Photosphäre beträgt

$$L = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4. \quad (7.111)$$

Damit erhält man zwei Beziehungen zwischen P und T mit den Sternmodellen an der Oberfläche. Diese Approximation ist sehr grob, da die Diffusionsapproximation in der Sternatmosphäre zusammenbricht. Generell sollte aber eine innere Lösung smooth an eine Lösung der Sternatmosphäre fitten. Diese inneren Lösungen werden an eine atmosphärische Lösung angehängt bei einem Fixpunkt $x = x_F$. Diese äußeren Lösungen hängen vom Radius R und der Leuchtkraft L des Modells ab. Daraus ergeben sich die Beziehungen

$$R = R(P_c, T_c) \quad (7.112)$$

$$L = L(P_c, T_c). \quad (7.113)$$

7.3.5 Die Hauptreihe

Wir betrachten hier eine Reihe von chemisch homogenen Modellen mit zentralem Wasserstoffbrennen. Diese Modelle repräsentieren junge Sterne, die sich aus dem interstellaren Medium gebildet haben. Durch die Kontraktion ist die Temperatur soweit angestiegen, dass die Fusion gestartet ist. Diese Modelle definieren die sog. *Alter–Null–Hauptreihe* (ZAMS = zero-age main sequence).

Kühle Sterne

In Abb. 7.15 vergleichen wir die Temperatur- und Druckverteilung für die Sonne bei $t = 0$ mit der heutigen Sonne (Bahcall & Ulrich, ApJ 1988). Der Druck steigt sehr schnell zum Zentrum hin an, die Temperatur ist stark zum Zentrum hin konzentriert. 50 % der Masse sind in einem Radius von 0,25 R enthalten. Die Konvektionszone enthält weniger als ein Prozent der Masse. Die Temperatur der heutigen Sonne ist höher als die der Anfangssonne, die aus 71% H, 27% He und 2% schweren Elementen bestand. Diese ursprüngliche Zusammensetzung der Elemente hat sich durch Fusion im Zentrum der Sonne verändert. Dort haben sich ebenso die C und N Häufigkeiten verändert, obschon der CNO–Zyklus in der Sonne nur langsam abläuft. C und N haben jedoch ihre Gleichgewichtsverteilung erreicht, N ist etwa 300 mal häufiger als C. Praktisch aller C ist in N umgewandelt worden. Ebenso ist ein geringer Anteil von O in N umgewandelt worden.

Heiße Sterne

In Abb. 7.17 zeigen wir den Aufbau eines B0 Sterns mit $T_{\text{eff}} = 30'400$ K. Dieser Stern hat eine Masse von 15 $M_{\odot}$ und einen Radius von 5.6 $R_{\odot}$. Die Entwicklung wird ebenso nach 8.6 Mio. Jahren gezeigt, wobei der Radius auf 8.14 $R_{\odot}$ ansteigt und $T_{\text{eff}} = 27'900$ abfällt. In dieser Berechnung ist kein Massenverlust berücksichtigt worden, der insbesondere bei O Sternen sehr wichtig wird. Wie bei der Sonne steigen die Zentraltemperatur und der Zentraldruck an wegen der Konversion von H in He und der nachfolgenden Kontraktion des Cores. Die Hülle

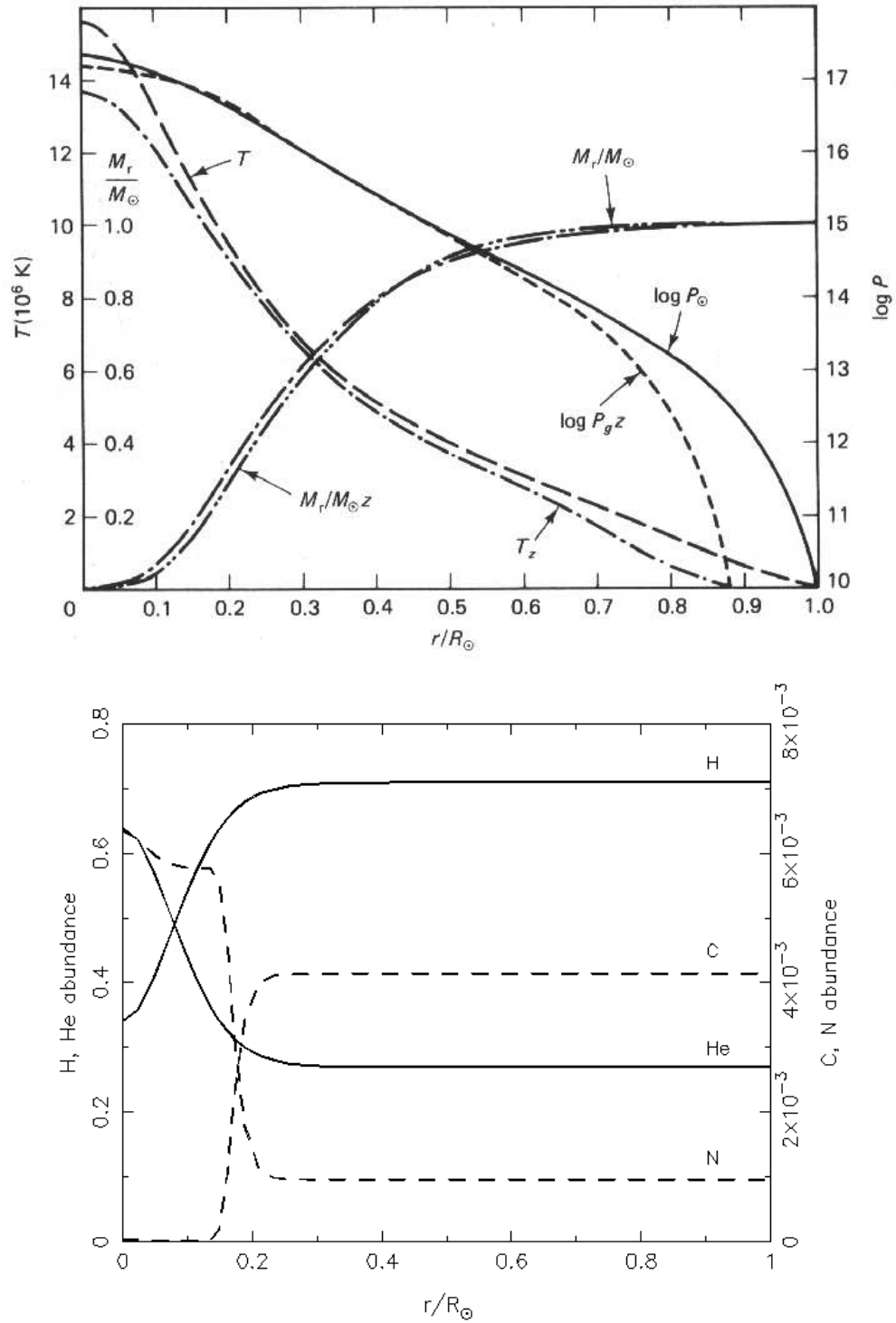


Abbildung 7.15: Strukturfunktionen der Sonne als typischer massearmer Stern auf der Hauptreihe. Oben: Temperatur- und Druckverteilung, sowie die Verteilung der Massenschalen (zur heutigen Zeit im Vergleich zu Alter-Null). Unten: Verteilung der chemischen Elemente im Sonneninneren. Ein großer Teil des Wasserstoffs ist im Zentrum bereits verbrannt, C ist in N umgewandelt worden. Im äußeren Bereich sind die Häufigkeiten noch unverändert.

expandiert, da sich die Temperatur an der Übergangsschicht zwischen He-Kern und H-Hülle erhöht. Wegen der hohen Zentraltemperatur in B-Sternen ist der CNO-Zyklus nun dominant. Energieproduktion und Temperatur sind deswegen stark zum Zentrum hin konzentriert. Die Energie wird in einem sehr kleinen Volumen erzeugt, das konvektiv ist. Deshalb ist dieser Core sehr gut durchmischt.

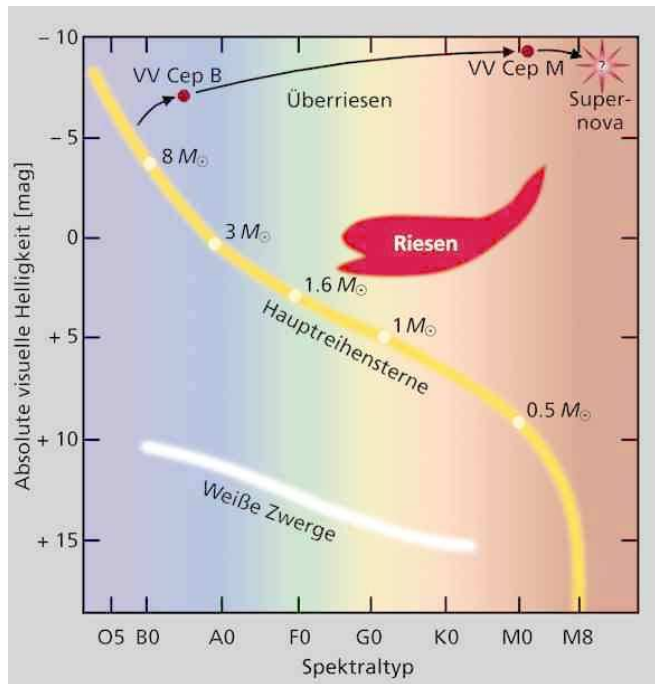


Abbildung 7.16: Die Position eines Sterns auf der Hauptreihe ist allein durch die Masse des Sterns bestimmt, falls die chemische Zusammensetzung bekannt ist.

Allgemein dominiert bei Sternen mit Massen $M > 1,5 M_{\odot}$ der CNO-Zyklus, weshalb sie über einen konvektiven Core verfügen (Abb. 7.18). Sterne der unteren Hauptreihe beziehen ihre Energie aus der pp-Kette mit Strahlungsgleichgewicht im Core. Ihre Hüllen sind jedoch konvektiv. Die Tiefe der Konvektionszone nimmt mit abnehmender Effektivtemperatur zu. Bei Sternmassen unterhalb von $0,08 M_{\odot}$ ist die Zentraltemperatur zu niedrig, um das Wasserstoffbrennen zu starten. Diesen Objekten steht nur die durch Kontraktion zu gewinnende Energie zur Verfügung (s. Jupiter).

Grenzwert Massereicher Sterne – Population III Sterne

Bei Sternen von 10 Sonnenmassen und mehr dominiert der Strahlungsdruck den Gesamtdruck im Innern des Sterns, d.h. $P \simeq P_{\text{Rad}}$. Damit wird die Zustandsgleichung für diese Sterne wieder einfach

$$P = \frac{1}{3} a T^4 \quad , \quad \epsilon = a T^4 . \quad (7.114)$$

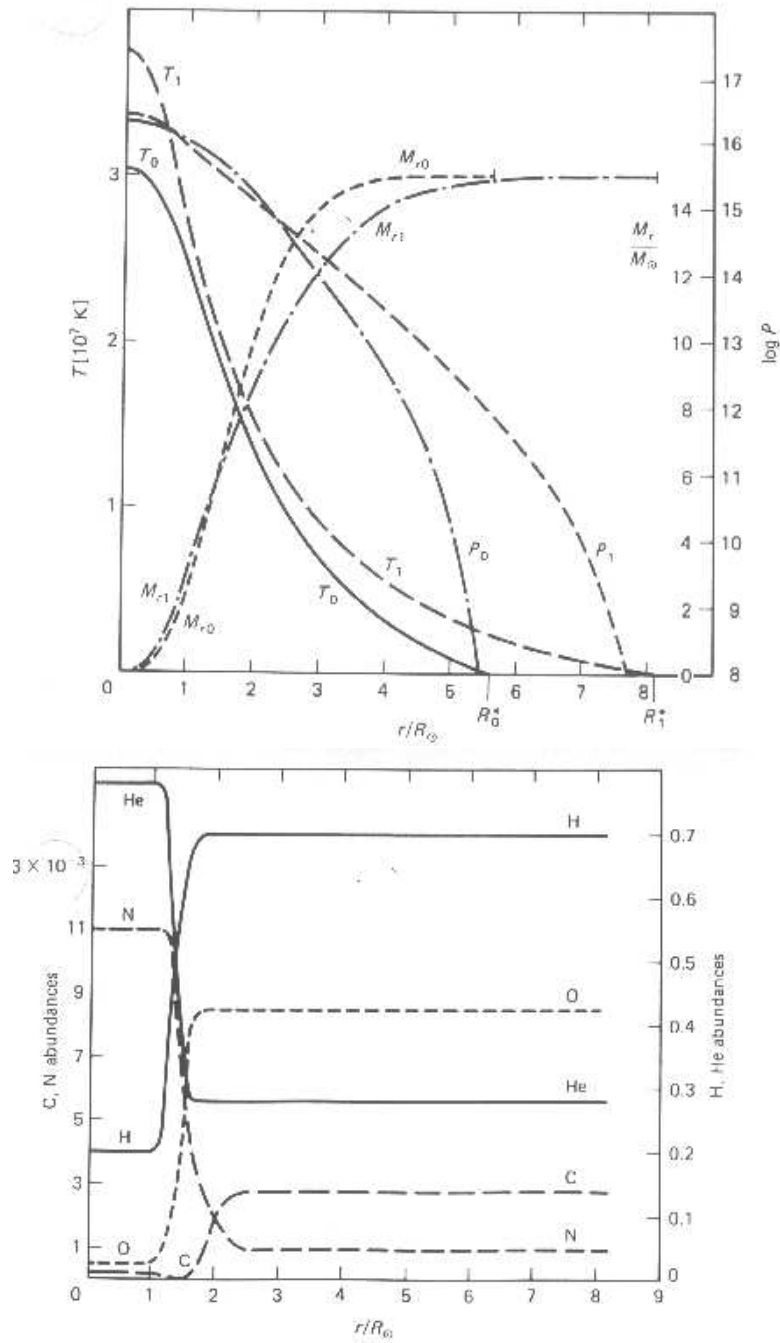


Abbildung 7.17: Strukturfunktionen eines B Sterns mit $15 M_\odot$ auf der Hauptreihe. Oben: Temperatur- und Druckverteilung, sowie die Verteilung der Massenschalen. Unten: Verteilung der chemischen Elemente im Sonneninnern. Ein großer Teil des Wasserstoffs ist im Zentrum bereits verbrannt, C ist in N umgewandelt worden. Im äußeren Bereich sind die Häufigkeiten noch unverändert.

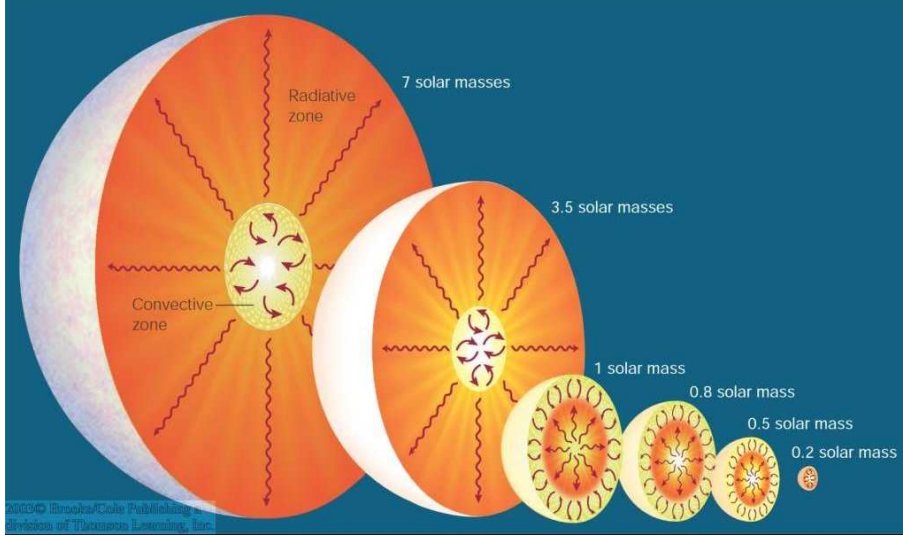


Abbildung 7.18: Die innere Struktur der Sterne auf der Hauptreihe. Massearme Sterne sind voll konvektiv, sonnenartige Sterne haben einen radiativen Kern und eine konvektive Hülle. Sterne oberhalb von 1,3 Sonnenmassen werden konvektiv im Kern, dafür wird die Hülle jetzt radiativ.

Daraus folgt die Entropie s pro Baryon

$$s = \frac{4}{3} \frac{aT^3}{n_B} \quad (7.115)$$

und damit die Temperatur

$$T = \left(\frac{3\rho s}{4m_p a} \right)^{1/3}. \quad (7.116)$$

Setzen wir diesen Ausdruck für die Temperatur in die Zustandsgleichung ein, so folgt

$$P = K \rho^{4/3}, \quad K \equiv \frac{1}{3} a \left(\frac{3s}{4m_p a} \right)^{4/3}. \quad (7.117)$$

Dies ist die Zustandsgleichung einer Polytrope mit $n = 3$ (s. Diskussion bei Weißen Zwergen). Für solche Zustandsgleichungen wird das hydrostatische Gleichgewicht durch die Lane–Emden Gleichung beschrieben, wobei der Radius skaliert wird, $\xi = r/A$, und die Dichte ρ durch die Funktion $\Theta = (\rho/\rho_c)^{1/n}$ ausgedrückt wird. Aus der ersten Nullstelle $\Theta(\xi_1) = 0$ erhalten wir den Radius R des Sterns

$$R = \sqrt{\frac{K}{\pi G}} \rho_c^{-1/3} \xi_1, \quad (7.118)$$

sowie die totale Masse des Sterns

$$M = 4\pi A^3 \rho_c \xi_1^2 |\Theta'(\xi_1)|. \quad (7.119)$$

Damit können wir die Zentraldichte ρ_c durch Masse und Radius ausdrücken

$$\rho_c = A_3 \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (7.120)$$

mit $A_3 = 54, 18$, und auch den Zentraldruck

$$P_c = K \rho_c^{4/3} = W_3 \frac{GM^2}{R^4} \quad (7.121)$$

mit $W_3 = 11, 05$. Daraus ergibt sich auch eine Relation zwischen der Zentraltemperatur und dem Radius des Sterns

$$R = \left(\frac{3W_3 G}{A} \right)^{1/4} \frac{\sqrt{M}}{T_c}. \quad (7.122)$$

Da CNO–Brennen der Energielieferant für massereiche Sterne darstellt

$$\epsilon_{CNO} = 3 \times 10^{-91} X X_{CNO} \rho_c T_c^{13} \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (7.123)$$

und $X_{CNO} \simeq Z/3$, folgt daraus eine Beziehung zwischen der Leuchtkraft des Sterns und der Zentraltemperatur

$$\epsilon_{CNO} M = \epsilon_1 \frac{XZ}{3} \rho_c M T_c^{13} = L_{ED} = \frac{4\pi c G M m_p}{\sigma_T}. \quad (7.124)$$

Hier geht ein, dass massereiche Sterne praktisch an der Eddington–Grenze strahlen. Da ρ_c eindeutig durch die Masse bestimmt ist, folgt daraus die Zentraltemperatur als Funktion der Masse

$$T_c = 3 \times 10^7 \text{ K } Z_0^{-1/16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/32}. \quad (7.125)$$

Z_0 bezeichnet die Häufigkeit der schweren Elemente in Einheiten von 0.03. Dieses Resultat ist sehr interessant: **die Zentraltemperatur massereicher Sterne hängt praktisch nicht von der Masse der Sterne ab**. Aus obiger Beziehung zwischen Radius und Zentraltemperatur ergibt sich damit folgende Masse–Radius Relation

$$R = 1,8 \times 10^{11} \text{ cm } Z_0^{1/16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{15/32} = 18,5 R_\odot Z_0^{1/16} \left(\frac{M}{50 M_\odot} \right)^{15/32}. \quad (7.126)$$

Dies entspricht bei 10 Sonnenmassen einem Radius von etwa 8 Sonnenradien.

Da wir den Radius kennen, folgt nun auch die Effektiv–Temperatur dieser Sterne

$$T_{\text{eff}} = \left(\frac{L_{ED}}{4\pi\sigma_{SB}R^2} \right)^{1/4} \simeq 5,2 \times 10^4 \text{ K } Z_0^{-1/32} \left(\frac{M}{100 M_\odot} \right)^{1/64}. \quad (7.127)$$

Die Temperatur massereicher Sterne wird praktisch unabhängig von ihrer Masse (s. Abb. 7.14). Dies bedeutet, dass die Hauptreihe im HRD oberhalb von 50.000 K abrupt endet. In diesem Massenbereich von 50 bis 100 Sonnenmassen sind jedoch praktisch keine Sterne zu

finden. Diese Sterne würden schnell wieder Masse verlieren, insbesondere durch starke Sternwinde und Instabilitäten im Innern. Sie könnten jedoch im frühen Universum vorkommen, da hier die schweren Elemente fehlen, welche die Sternwinde antreiben. Bei diesen Sternen sind nicht nur H, sondern auch He vollständig ionisiert.

Möglicherweise waren die ersten Sterne viel massereicher als die heutigen. So wird angenommen, dass die ersten Sterne zwischen 50- und 500-mal schwerer waren als unsere heutige Sonne. Sie wuchsen schnell heran und starben dementsprechend auch viel schneller und endeten in einer hellen Supernova, die durch ihre Explosion die nähere Umgebung beeinflusst hat. Supernovae Ausbrüche könnten auch die Quelle der Gamma-Strahlen Ausbrüche sein, die zu den gewaltigsten Explosionen und Ausbrüchen im Weltall zählen. Ein Charakteristikum der ersten Sternengeneration nach dem Urknall – der sogenannten **Population-III-Sterne** – ist ihre große Masse. Untersuchungen zu ihrer Entstehung sagen Massen von bis zu $1000 M_{\odot}$ voraus. Dies hängt mit einem weiteren Merkmal dieser Sterne zusammen; sie sollen sich aus primordiales Gas gebildet haben, welches bis auf Spuren von Lithium nur aus Wasserstoff und Helium bestand.

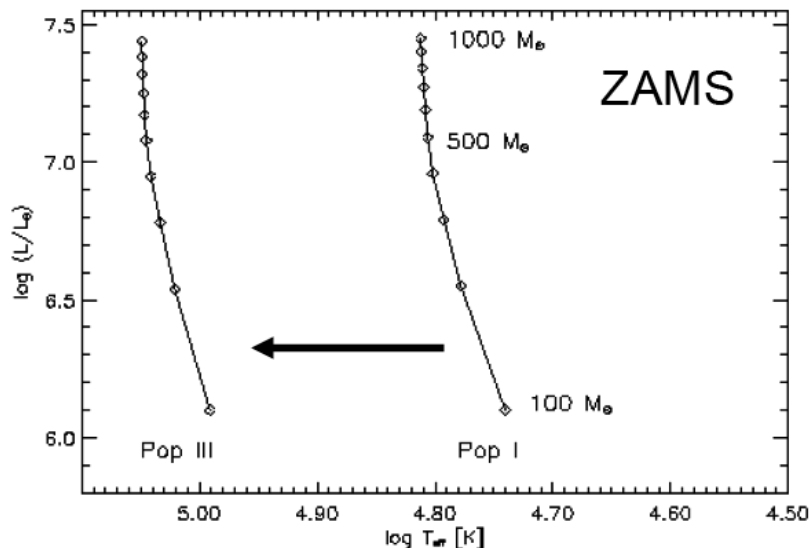


Abbildung 7.19: Die Lage der Pop III Sterne im HRD. Im Vergleich zu normalen Pop I Sternen erreichen Pop III Sterne höhere Temperaturen. Die Temperatur bleibt fast konstant, während die Leuchtkraft nach Eddington mit der Masse linear zunimmt.

Wegen der anfänglichen Abwesenheit von CNO-Elementen sowie der geringen Effizienz des pp-Brennens erreichen alle massereichen Population-III-Sterne die Hauptreihe im Vergleich zu normalen Sternen als deutlich kompaktere und heißere Objekte. Population-III-Sterne mit Massen oberhalb von $30 M_{\odot}$ kontrahieren bis zu Zentraltemperaturen von 10^8 K, produzieren im 3-alpha-Prozess Kohlenstoff und lassen sich im Modus des heißen CNO-Brennens auf der Hauptreihe nieder. Population-III-Sterne im Bereich $15 M_{\odot} - 30 M_{\odot}$ erreichen die Hauptreihe im pp-Brennen, doch übernimmt auch hier der CNO-Zyklus noch im Hauptreihenstadium die Energieproduktion.

7.3.6 Die Hayashi-Linie

Konvektion tritt in verschiedenen Sternstadien auf. Wir untersuchen hier einen voll konvektiven Stern, bei dem nur die Atmosphäre radiativ bleibt. Unter der *Hayashi-Linie* versteht man die Punkte aller voll konvektiven Sterne im HR Diagramm, die durch ihre Masse M und chemische Zusammensetzung gegeben sind. Jeder Satz von Parametern definiert eine eigene Hayashi-Linie. Diese Linien befinden sich bei Temperaturen $T_{\text{eff}} \simeq 3000 \text{ K} - 5000 \text{ K}$, sie verlaufen sehr steil im HRD (Abb. 7.20).

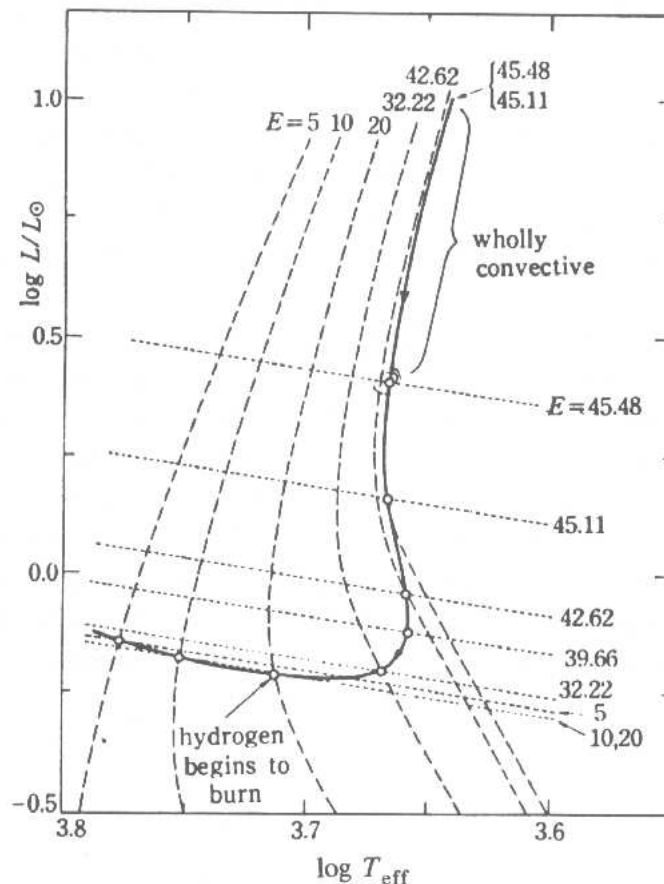


Abbildung 7.20: Die Lage der Hayashi-Linie im HRD für verschiedene Konstanten E . Wenn sich ein radiativer Kern entwickelt, wandert der Stern nach links zu geringeren Werten von E . Die dicke Linie entspricht der Entwicklung eines Sterns mit fester Masse, wenn er sich kontrahiert. Entwickelt sich eine genügend hohe Zentraltemperatur, so beginnt das Wasserstoffbrennen.

Diese Linie stellt ebenso eine Trennlinie dar zwischen erlaubten und unerlaubten Gebieten. **Rechts von der Linie gibt es keine Sterne im hydrostatischen Gleichgewicht.** In der frühen Entwicklungsphase kommen Sterne nahe an die HL heran. Die Bedeutung dieser Linie wurde erst Anfang der 60er Jahre von Hayashi entdeckt. Ihre genaue Form kann man nur aus

numerischen Modellen herausholen.

Unter der Annahme, dass der Stern eine adiabatische Schichtung aufweist, folgt $d \ln T / d \ln P = \nabla_{\text{ad}} = 2/5$, falls das Gas voll ionisiert ist. Damit gilt

$$P = K T^{5/2} \quad (7.128)$$

Diese Sterne sind nicht durch die Konstante C , sondern die Konstante E beschrieben, die aus den inneren und äußeren Randbedingungen folgt. Aus numerischen Rechnungen folgt, dass vollständig konvektive Sterne den höchsten Wert von E mit $E_0 = 45.48$ aufweisen (Hayashi, Hoshi & Sugimoto 1962). Wenn sich unter der Konvektionszone eine radiative Zone befindet, so fällt E geringer aus.

Wir nehmen an, dass diese Beziehung gilt bis zur Photosphäre, wo $\tau = 2/3$, $P = P_0$, $T = T_{\text{eff}}$, $r = R$ und $m = M$. Hier geht der Stern über in eine radiative Atmosphäre. Deshalb gilt hier

$$K = P_G(\tau_*) / T(\tau_*)^{5/2} = K(R, T_{\text{eff}}) = K(R, L). \quad (7.129)$$

Dies ergibt eine zweite Beziehung für K und R . Wir erhalten so eine eindimensionale Sequenz von Lösungen für K und R als Funktion von L , die approximativ ausgedrückt werden kann

$$\log \frac{L}{L_\odot} = 0,272 - 1,835 \log \frac{M}{M_\odot} + 9,17(\log T_{\text{eff}} - 3,70) + 2,27 \log \frac{E_0}{40}. \quad (7.130)$$

Diese Beziehung hängt stark von der Temperatur ab, 4% Änderung in T_{eff} führen zu einer um einen Faktor 10 höheren Leuchtkraft. **Für feste Konstante E befinden sich Sterne mit fester Masse praktisch auf einer vertikalen Linie im HRD, die als Hayashi-Linie bezeichnet wird** (Abb. 7.20).

Die Hayashi-Linien sind weit entfernt von der Hauptreihe im oberen Teil des HRD, aber nähern sich ihr im unteren Bereich. Hauptreihensterne sind voll konvektiv im Massenbereich $M \leq 0,25 M_\odot$. Hier muß die Hayashi-Linie die Hauptreihe kreuzen.

7.4 Die Sonne als Hauptreihenstern

Die Sonne ist das zentrale Gestirn am Himmel, von ihr hängt alles Leben auf der Erde ab. Diese überragende Bedeutung war den Menschen seit Alters her bewusst. Viele frühere Kulturen verehrten die Sonne als Gottheit. Die regelmäßige tägliche und jährliche Wiederkehr der Sonne wurde teils ängstlich erwartet und mittels kultischer oder magischer Rituale beschworen. Besonders Sonnenfinsternisse lösten große Bestürzung und Furcht aus. Im alten China glaubte man, ein Drache würde die Sonne verschlingen. Andererseits machte sich die Menschheit das Wissen über die für alles Leben fundamentalen Perioden Tag und Jahr schon seit frühester Zeit nutzbar. Die Sonne ist die natürliche Uhr der Menschen und die Abfolge der Jahreszeiten führte zur Entwicklung des Kalenders, der vor allem nach Erfindung des Ackerbaus für alle Kulturen überlebenswichtig war.

7.4.1 Von der Molekülwolke zum Protostern

Sterne entstehen aus interstellaren Gas und Staub - Wolken, die auch als Nebel bezeichnet werden. Bei genauerer Betrachtung von Aufnahmen heller Nebel findet man häufig kleine

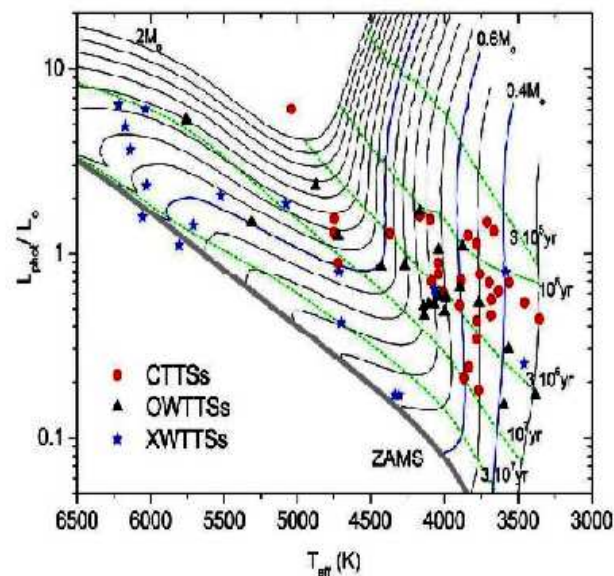


Abbildung 7.21: Vorhauptreihensterne entwickeln sich auf der Hayshi–Linie und wandern dann nach links auf die Hauptreihe.

dunkle Blasen, die nach ihrem Entdecker, dem amerikanischen Astronomen Bart J. Bo, **BOK-Globulen** genannt werden. Sie sondern Infrarot- und Radiostrahlung aus, die uns anzeigt, dass sie die Geburtsstätten von Sternen sind.

Kurz nach Entstehung des Universums, als die Materie noch eine Temperatur von vielen Hunderttausend Grad hatte, konnten keine Sterne entstehen. Mit der zunehmenden Ausdehnung des Weltalls kühlte der Wasserstoff jedoch ab. Einige Milliarden Jahre nach dem Urknall entstanden die Protogalaxien, in denen das Gas zu Nebelwolken kondensierte. An einigen Stellen stieg die Dichte des Gases auf eine Konzentration von Milliarden Molekülen pro Kubikmeter. Diese Dichte, obwohl immer noch weit geringer als die des besten je in einem Labor hergestellten Vakuums, gab der Schwerkraft die Möglichkeit, die Materie noch weiter zu verdichten.

Während dieses Geschehens heizten sich die Zentren jeder Globule auf, wie die Luft beim Aufpumpen eines Autoreifens. In allen Blasen erreichte die Temperatur Werte, bei denen zunächst die Moleküle zerlegt und später sogar durch den Verlust der äusseren Elektronen ionisiert wurden. Mit der Aufnahme neuer Materie stieg der Druck auf die Zentralregion noch weiter an.

Dieser Protostern produzierte bereits grosse Energiemengen, obwohl noch keine Kernreaktionen stattfanden. Doch kein sichtbares Licht konnte durch die Gas- und Staubbhülle in seiner Umgebung entkommen, lediglich Infrarotstrahlung vermochte sie zu durchdringen. Gleichzeitig wurde die Lage im Kern des Protosterns kritisch. Hier hatte sich die Dichte milliardenmal verstärkt und die Temperatur Werte von 10 Millionen Kelvin und mehr erreicht. Die positiv geladenen Wasserstoffatome des Kerns, die nun keine Elektronen mehr besaßen,

wurden so stark komprimiert, dass sie die hohen elektrischen Abstossungskräfte überwinden und zusammenstießen. Aus dem Wasserstoff entstand Helium, aus dem Protostern wurde ein echter Stern.

Jeder Heliumkern besass etwas weniger Masse als der Wasserstoff, aus dem er entstanden war. Die verschwundene Masse wurde entsprechend der von Einstein entdeckten Formel $E = mc^2$, in Energie umgesetzt. Beim Versuch dieser riesigen Energiemengen aus dem Kern zu entweichen, stieg die Temperatur dort noch weiter an. Nur seine grosse Masse verhinderte, dass er in diesem Stadium explodierte. Als die Strahlung schliesslich den Weg nach aussen gefunden hatte, setzte sie die Konvektion in Gang. Das tiefliegende Gas wurde aufgeheizt, stieg an die Oberfläche, kühlte ab und sank wieder, um den Zyklus von neuem zu beginnen. Der junge Stern blies seine Hülle aus Gas und Staub fort und wurde somit für den Rest des Universums sichtbar.

Der gleiche Prozess der Sternentstehung findet auch heute noch unverändert statt. Die Radioastronomen glauben, Teile dieses Geschehens in einigen Nebeln, z.B. im Orion, kurz beobachtet zu haben. Doch nicht jede Gas- und Staubwolke entwickelt sich zu einem Stern. Besitzt sie zu wenig Masse, genügt die Gravitationskraft nicht, um eine ausreichende Dichte zu schaffen. Die Temperatur steigt nicht über den kritischen Wert bei dem die Kernfusion beginnt. Ein Stern, der unter diesen Bedingungen dennoch entsteht, wird kaum sichtbar, und nur aufgrund seiner Infrarotstrahlung zu finden sein.

In unserem Bereich der Milchstrasse, besonders in den Spiralarmen, scheint es viele derartige Objekte zu geben. Sie heissen braune Zwerge. Einige der misslungenen Sterne besitzen nur die Grösse des Planeten Jupiter und heissen folglich auch Jupiters. Fertige Sterne tragen Merkmale der Aera, aus der sie stammen. Die ersten nach dem Urknall entstandenen Sterne bestanden aus Urmaterie, Wasserstoff mit einer Beimengung von Helium. Spätere Sternengenerationen entstanden aus Urmaterie, die sich mit den Resten explodierter Sterne vermischt hatte. Sie enthalten auch schwerere Elemente, als Helium, die vor der Explosion im Inneren alter Sterne entstanden waren. Da auch in der Sonne diese Elemente zu finden sind, gehört sie offensichtlich nicht zu den Sternen der ersten Generation.

Vor etwa 4,6 Milliarden Jahren zog sich eine riesige Gas- und Staubwolke unter ihrer eigenen Schwerkraft zusammen. Im Zentrum der Wolke wurde die Materie immer dichter zusammengepresst, wobei Druck und Temperatur immer weiter anstiegen. Zu diesem Zeitpunkt wurden bereits große Energiemengen in Form von Strahlung abgegeben. Die Sonne war als Protostern geboren. Erst nach 50 Millionen Jahren landete sie auf der Hauptreihe und begann ihr ruhiges Wasserstoffbrennen.

7.4.2 Die Planeten entstehen

Die Planeten unseres Sonnensystems weisen alle nahezu kreisförmige Umlaufbahnen auf, und diese liegen auch ungefähr in einer Ebene. Wie kann das sein? Es gibt hierzu eine natürliche Erklärung: Die Sonne und ihre Planeten entstanden gemeinsam aus einer einzigen, gravitationsinstabilen Gas- und Staubwolke. Wenn aus einer solchen Wolke ein massereicher Stern wie die Sonne entsteht, geht der Hauptdrehimpuls auf die zirkumstellare Materie über. Das erkennt man daran, dass die Planeten zusammen nur 1/750 der Sonnenmasse aufweisen, die Sonne selbst aber nur 1/200 des Gesamtdrehimpulses. Alle mitentstandenen Planeten haben also die ursprüngliche Drehrichtung der Wolke beibehalten. Bei massereichen Sternen dagegen kommt der Hauptdrehimpuls dem Zentralkörper zu, es werden hier also kaum Planeten anzutreffen sein. Dagegen spricht auch der extrem starke und recht früh einsetzende Sternwind

dieser Spezies, der alle umgebende Materie fortweht.

Nun beginnen einzelne Staubteilchen sich zusammenzulagern, was überwiegend durch sanfte Kollisionen geschieht. Die sich bildenden Zusammenballungen gewinnen immer mehr an Größe, womit jetzt zunehmend gravitative Einflüsse zur Geltung kommen. Es entstehen unzählige Bruchstücke im Bereich von 100 bis 1000 m, das beweisen uns heute noch die vielen Einschlagkrater auf Merkur, Mond und Mars.

Die Teilchen wachsen nun langsam weiter, aber je schwerer sie werden, umso schlechter können sie vom Gas mitgeschleppt werden. Die Folge: sie sinken in Richtung der Symmetrieebene der sich durch die einsetzende Rotation der Wolke bildenden Scheibe, und sorgen hier für eine konzentrierte Partikelansammlung. Um einen Durchmesser von etwa 1 m zu erreichen, benötigt ein Teil mehrere Hunderttausend Jahre, aber schon in nur 1000 weiteren Jahren ist es auf 100 bis 1000 km angewachsen. Nun kommt es auch immer wieder zu Zusammenstößen, wodurch manche der Brocken zertrümmert werden. Allerdings sind größere Bruchstücke bereits in der Lage, durch ihre Gravitation kleinere anzuziehen und damit das Wachstum fortzusetzen.

Planetesimale (Planetenkeime) von 100 bis 1000 km waren sicher noch von größeren Gasmassen der Urwolke umgeben, weshalb sie weitere Staubpartikel auch ohne großen gravitativen Einfluss einfangen konnten. Für die Entstehung der erdähnlichen Planeten waren so nur wenige Millionen Jahre erforderlich, auch die Bildung der Riesenplaneten war vor Ablauf von etwa 10 Millionen Jahren abgeschlossen. Zu diesem Zeitpunkt begann die Sonne zu erstrahlen, nachdem zuvor die ersten Kernfusionen zündeten und die Reaktionsrate ständig weiter anstieg. Jetzt aber bereitete der erste starke Sonnenwind der weiteren Planetenbildung ein Ende, indem er lose gebundenes Gas und Staub fort blies. Das Sonnensystem wurde durchsichtig. Trotzdem konnten in den weit entfernten, kalten Außenbereichen eisartige Körper den Angriffen der jungen, wilden Sonne widerstehen, wie etwa die Satelliten von Saturn und Uranus, oder die vielen Milliarden von Kometen.

Die entfernteren Riesenplaneten haben jedoch ihre Urnebel- Atmosphäre bis heute behalten, der in diesen Zonen geschwächte Sonnenwind kann den gravitativ stark gebundenen Gasen nichts anhaben. Die meisten kleineren Bruchstücke sind von den Planeten eingefangen worden und die Erde wird bereits vom Mond umkreist, der nach neuen Erkenntnissen vermutlich durch Kollision mit einem marsgroßen Körper aus ihr gerissen wurde.

Nach einer etwas unruhigen Anfangsphase betritt die Sonne nun den Hauptast im HR-Diagramm und verbrennt ab jetzt ruhig und gleichmäßig ihren Wasserstoffvorrat. Der Sonnenwind lässt nach, und auf den erdähnlichen Planeten entgasen nun die heißen Schmelzen und es setzt vulkanische Aktivität ein. Dabei werden enorme Gasmengen freigesetzt, darunter Wasserdampf, Kohlendioxid und Stickstoff. Nach weiteren langen Jahren der Abkühlung beginnt nun die Kondensation des Wasserdampfes - erste Meere bilden sich. In ihnen lösen sich große Teile des Kohlendioxids, woraus dann unlösliche Verbindungen mit Alkali- und Erdalkalimetallen, wie Kalium, Magnesium usw. entstehen, die man heute in den Sedimentgesteinen findet.

Die zweite, neue Atmosphäre der Erde enthielt nur wenig Sauerstoff, vielleicht 0,1%. Dieser entstand durch Fotodissoziation (Aufspaltung) des Wasserdampfes infolge der kräftigen UV-Strahlung. Höher konnte der Sauerstoffgehalt nicht steigen, weil er selbst den UV-Anteil des Lichts absorbierte (Bildung von Ozon). Erst durch die einsetzende Photosynthese von Pflanzen wird die Atmosphäre mit Sauerstoff angereichert, wobei sich gleichzeitig der Kohlendioxidanteil reduziert, da er von den Pflanzen assimiliert wird. Kleine Planeten innerhalb der Ökosphäre verloren bald ihre vulkanischen Atmosphären vollständig oder teilweise,

da ihre Gravitation zu gering war. Die erdähnliche Venus konnte sie zwar an sich binden, ist jedoch zu heiß, als dass auch nur primitivstes Leben hätte entstehen können.

Die inzwischen entdeckten extrasolaren Planeten sind in der überwiegenden Zahl jupiterähnliche Gasriesen¹. Dies einfach aus dem Grund, weil unsere Instrumente noch nicht empfindlich genug sind, um kleinere, erdähnliche Planeten aufzustöbern. In den nächsten Jahren wird die Technik jedoch weiter verbessert und wir werden dann sicher auch kleine Planeten entdecken. Die bisher gefundenen Gasriesen besitzen zum Teil Umlaufbahnen, die zehnmal enger sind als die des Merkur. Die Wissenschaftler sind damit gezwungen, die Theorie der Planetenentstehung neu zu formulieren. Denn die Scheibe des Urnebels kann eigentlich in solch engem Abstand vom Stern nicht genügend Materie enthalten, um solche Gasriesen entstehen zu lassen, sie würde dem Stern zukommen. Selbst wenn das aber der Fall wäre, könnte sich kein Gasplanet bilden, denn er braucht Eis und Kälte zu seiner Entstehung. Und nicht zuletzt würde er sicherlich vom nahen Stern zerrissen werden.

Der Mechanismus, welcher zur Entstehung von Planeten aus einer ursprünglichen Staub- und Gaswolke führt, ist bis zum heutigen Zeitpunkt noch nicht eindeutig geklärt. Die ersten Millionen Jahre sind entscheidend für die Ausbildung der Planeten. Nach bisheriger Auffassung entstand unser Sonnensystem vor etwa 4,6 Milliarden Jahren zusammen mit Hunderten weiterer Sterne aus einer riesigen Gas- und Staubwolke, ähnlich dem heutigen Orionnebel. Die Wolke zerfiel in zahlreiche Knoten, die wiederum unter ihrer eigenen Schwerkraft zusammenfielen, bis der steigende Druck in ihrem Inneren das nukleare Feuer der Sterne entfachte.

Insgesamt konnten die Astronomen bis heute Planeten bei fast 200 Sternen aufspüren. Bei vielen dieser Planeten handelt es sich aber um Riesenplaneten auf extrem engen Bahnen, von den Forschern heiße Jupiter genannt. So kreisen 40 Prozent der Exoplaneten auf Bahnen um ihren Stern, die einen Radius von weniger als 0,4 Astronomischen Einheiten haben - sie sind ihrem Zentralstern also näher als Merkur der Sonne.

Diese hohe Zahl heißer, jupiterähnlichen Planeten ist überraschend, da die Theorien der Planetenentstehung die Entstehung von Riesenplaneten in den kälteren äußeren Regionen der Gas- und Staubscheibe um einen jungen Stern vorhersagen. Die Astronomen gehen deshalb davon aus, dass die Riesenplaneten innerhalb von rund 100.000 Jahren nach ihrer Entstehung durch eine Übertragung von Drehimpuls auf die Gasscheibe nach innen wandern. Dabei würden sie jedoch, so die bisherige Vorstellung, etwa weiter innen entstandene erdähnliche Planeten aus ihrer Bahn werfen.

Simulationen von Raymond, Mandell und Sigurdsson² zeigen nun jedoch ein komplizierteres Szenario. Die Forscher simulierten das Wachstum und die Dynamik des protoplanetaren Materials während und nach der Migration eines Riesenplaneten durch die terrestrische Zone. Dazu ließen sie einen jupitergroßen Planeten in einem Abstand von fünf Astronomischen Einheiten entstehen und sich in 100.000 (simulierten) Jahren bis auf 0,25 Astronomische Einheiten an seinen Zentralstern annähern.

Dabei zeigte sich, dass zwar tatsächlich innerhalb der ursprünglichen Bahnen der Riesenplaneten kleinere Planeten entstehen, die dann allerdings mit den Riesenplaneten gemeinsam nach innen wandern und zu heißen Erden werden.

Doch zur Überraschung der Wissenschaftler bildeten sich auch nach der Passage der Riesenplaneten aus den Überresten der Gas- und Staubscheibe weitere erdähnliche Planeten. Diese Planeten sind zumeist reich an Wasser und kreisen auf stabilen Bahnen in der lebensfreund-

¹R.P. Butler et al.: *Catalog of Nearby Exoplanets*, *Astrophys. J.* 646, 505 (2006)

²Sean N. Raymond, Avi M. Mandell und Steinn Sigurdsson: *Exotic earth: Forming Habitable Worlds with Giant Planet Migration*, *Science* 313, 1413 (2006)

lichen Zone des Sterns - und bieten somit optimale Bedingungen für die Entstehung von Leben in den bislang als lebensfeindlich eingestuften Systemen.

7.4.3 Das Hauptreihenstadium

Die Sonne ist der beherrschende Himmelskörper in unserem Planetensystem, zu dessen Gesamtmasse sie mit einem Anteil von 99,9% beiträgt. Ihr Durchmesser beträgt 1,3925 Millionen km (109-facher Erddurchmesser), was knapp unter dem geschätzten Mittelwert aller Sterne liegt. Ihr durchschnittlicher Abstand von der Erde beträgt ungefähr 150 Millionen Kilometer. Sie ist ein Stern der Hauptreihe. Ihre Spektralklasse ist G2 und sie hat die Leuchtkraftklasse V. Das bedeutet, dass die Sonne ein durchschnittlicher, gelb leuchtender **Zwergstern** ist, der sich in der etwa 10 Milliarden Jahre dauernden Hauptphase seiner Entwicklung befindet. Ihr Alter wird auf etwa 4,6 Milliarden Jahre geschätzt (aus Altersbestimmungen an Meteoriten).

Die Leuchtkraft der Sonne entspricht einer Strahlungsleistung von etwa $3,846 \times 10^{26}$ Watt. Diese Strahlung wird zum Großteil im Bereich des sichtbaren Lichts abgegeben, mit einem Maximum bei den Spektralfarben von Gelb bis Grün. Durch ihre Oberflächentemperatur von 5700 Grad Kelvin fällt unsere Sonne in die Spektralklasse G (Gelb) und gehört im Hertzsprung-Russell-Diagramm der Hauptreihe an. Aus dem Weltraum aus betrachtet erscheint sie jedoch subjektiv eher weiß. Ihre gewohnte gelbe Farbe erklärt sich durch das Zerstreuen ihres blauen Anteils an den Luftmolekülen (Stickstoff, Sauerstoff, Edelgase und Kohlenstoffdioxid) der Erdatmosphäre. Kurzwelligeres (blaues) Licht wird mit deutlich höherer Wahrscheinlichkeit gestreut als langwelligeres (rotes) Licht. Durch diese Zerstreuung strahlt der Himmel in alle Richtungen (also ohne Schattenwurf) blau und die Sonnenstrahlen, die auf die Erdoberfläche auftreffen erscheinen gelb. Je dicker die Luftschicht ist, die von den Sonnenstrahlen durchquert wird, desto mehr Sonnenstrahlen werden herausgelenkt. Die Abendsonne erscheint deswegen rötlich. Die zentrale Bedeutung der Sonne für die Lebensprozesse auf der Erde zeigt sich auch hier: Der Bereich des elektromagnetischen Spektrums, in dem die Sonne am stärksten strahlt, ist genau der für uns Menschen und die meisten anderen Lebewesen, die sich evolutionär daran angepasst haben, sichtbare Teil dieses Spektrums.

Die Sonnenmasse beträgt etwa das Doppelte der geschätzten Durchschnittsmasse eines Sterns unserer Milchstraße. Zählt man nur die Sterne mit Wasserstoffbrennen (schließt also die Braunen Zwerge aus), liegt ihre Masse im Durchschnitt. Ihre Masse setzt sich zu 73,5% aus Wasserstoff und zu 25% aus Helium zusammen. Hinsichtlich der Anzahl der Atome betragen diese Anteile 92,7% und 7,9%. Die restlichen 1,5 Prozent der Sonnenmasse setzen sich aus zahlreichen schwereren Elementen bis einschließlich Eisen zusammen, vor allem aus Sauerstoff und Kohlenstoff.

Im Sonnenkern entsteht aus den dicht gedrängten Atomkernen des Wasserstoffs durch Kernfusion Helium, so dass der Wasserstoff-Anteil zugunsten des Heliums in Zukunft weiter sinken wird. Dieser Prozess ist der Motor der Sonne, aus dem sie jene Energie bezieht, die sie an der Photosphäre (leuchtende, sichtbare Oberfläche) durch Strahlung abgibt. Da die Sonne kein fester Körper wie die erdähnlichen Planeten und Monde ist, sondern ein heißer Gasball, wäre sie ohne diesen Energienachschub von innen instabil. Sie würde sich abkühlen und auf einen Bruchteil ihrer jetzigen Größe zusammenziehen.

Die Sonne rotiert in rund vier Wochen um die eigene Achse. Diese Rotation dauert am Äquator 25,4 Tage, in mittleren Breiten 27-28 Tage und nahe den Polen 36 Tage. Dieser Unterschied in der Dauer eines Sonnentages wird als differenzielle Rotation bezeichnet und ist seit längerem durch Gas- und Hydrodynamik erklärbar. Anfang der 1990er erkannte man jedoch,

dass die Sonne unterhalb der Konvektionszone gleichförmig mit einer Periode von knapp 27 Tagen rotiert. Der Übergangsbereich, die sog. Tachocline, ist durch einen starken radialen Gradienten der differentiellen Rotation gekennzeichnet. Er ist auf wenige Prozent des Sonnenradius begrenzt und fällt in etwa mit dem unteren Ende der Konvektionszone zusammen. Der Verlauf der differentiellen Rotation innerhalb der Konvektionszone sowie die Lage und die Dicke der Tachocline sind theoretisch noch nicht verstanden.

7.4.4 Helium-Blitz und -Brennphase

Durch die Kontraktion der Zentralregion steigt dort die Temperatur schließlich auf 10^8 K. Bei diesem Wert setzt die Fusion von Helium zu Kohlenstoff ein. Aufgrund der extremen Dichte von der Größenordnung 10^6 g/ccm im Zentrum und der damit verbundenen Neutrino-Kühlung zündet die Fusionsreaktion zunächst innerhalb einer heißeren kugelschalenförmigen Zone um das Zentrum. Gewöhnlich würde die dabei freiwerdende Energie zu einer Expansion des Kerns führen, die die Temperatur stabilisiert. Die Kernzone befindet sich jedoch in einem besonderen quantenmechanischen Entartungszustand, was zur Folge hat, dass die Energie zunächst in die Auflösung der Entartung investiert wird. Daher ist zunächst kein stabiler Zustand möglich, so dass die Heliumfusion in Form einer gigantischen Explosion einsetzt, die als Helium-Blitz (helium flash) bezeichnet wird. Dabei steigt für mehrere Sekunden die Sonnenleistung auf $10^{10} L_{\odot}$. Das entspricht etwa 10 % der Leuchtkraft der gesamten Milchstraße. Erst nach einem Umsatz von 3 % des Heliumreservoirs setzt eine Expansion ein und stoppt diese Leistungsexkursion. Diese Explosion findet nur im Zentralbereich statt und ist äußerlich zunächst nicht bemerkbar. Sie drängt jedoch die Wasserstoffusionszone weiter nach außen, deren Temperatur daher abnimmt und damit auch der Energieumsatz. Paradoxerweise sinkt damit als äußerliche Folge des Helium-Blitzes innerhalb der nächsten 10.000 Jahre die Leuchtkraft ab und zwar um fast einen Faktor 100. Es folgt eine Phase von 1 Million Jahren, in denen die Sonnenparameter oszillieren bis sich ein stabiler Zustand der Heliumfusion im Zentrum einstellt, der anschließend 110 Millionen Jahre anhält. Gleichzeitig brennt auch die schalenförmige Wasserstoffusionszone weiter außen weiter. In dieser Zeit bleibt die Leuchtkraft nahezu konstant bei $44 L_{\odot}$ und der Radius bei $10 R_{\odot}$.

7.4.5 Heliumschalen-Brennen

Danach ist auch das Helium im Sonnenzentrum verbraucht und es beginnt eine Phase des Heliumschalen-Brennens, die 20 Millionen Jahre andauert. Damit existieren nun zwei ineinander geschachtelte schalenförmige Fusionszonen. Im Zentrum sammelt sich Kohlenstoff und kontrahiert gravitativ. Damit ist ein erneuter enormer Anstieg der Leuchtkraft auf $2000 L_{\odot}$ und eine Zunahme des Radius auf $130 R_{\odot}$ verbunden. Gegen Ende verliert die Sonne dabei einen Massenanteil von $0,1 M_{\odot}$.

In den letzten 500.000 Jahren dieser Phase erwartet man in Zusammenhang mit der Wechselwirkung zwischen dem kontrahierenden Kern und der Heliumfusionszone weitere instabile Situationen, bei denen kurzzeitige Leistungsexkursionen durch Heliumfusion mit etwa $10^6 L_{\odot}$ eintreten können. Ein wahrscheinliches Szenario wären beispielsweise vier solcher Helium-Blitze im Abstand von etwa 100.000 Jahren. Als Folge jedes dieser Helium-Blitze und der damit verbundenen Expansion der Wasserstoffschale kann die Fusion dort in den folgenden 200 Jahren vorübergehend völlig zum Stillstand kommen. Die äußerliche Folge eines Helium-Blitzes wäre daher wiederum zunächst eine Abnahme der Leuchtkraft. Nach 400 Jah-

ren erreicht die Energie des Helium-Blitzes die Oberfläche. Leuchtkraft und Radius steigen an und relaxieren in den folgenden 10.000 Jahren wieder. Dabei werden Variationen der Leuchtkraft zwischen $500 L_{\odot}$ und $5000 L_{\odot}$ erwartet, sowie Radiusvariationen zwischen 50 und $200 R_{\odot}$. In den Phasen maximaler Ausdehnung reicht die Sonnenoberfläche bis an die heutige Erdbahn heran. Nur durch die Zunahme des Erdbahndurchmessers entkommt die Erde der völligen Vernichtung. Gleichzeitig stößt die Sonne in diesen Phasen insgesamt eine Masse von weiteren 0,05 Sonnenmassen ab.

7.4.6 Weißer Zwerg und Planetarischer Nebel

Durch die erwähnten Massenverluste verliert die Sonne die gesamte äußere Hülle einschließlich der Wasserstoff- und Heliumfusionszone. Etwa 100.000 Jahre nach dem letzten Helium-Blitz wird daher der heiße innere Kern freigelegt, der im Wesentlichen aus hochverdichtetem Kohlenstoff und Sauerstoff besteht. Sein Radius beträgt nur noch $0,08 R_{\odot}$, dafür aber seine Oberflächentemperatur 120.000 K. Seine Leuchtkraft beträgt anfänglich $3500 L_{\odot}$. Aufgrund der hohen Temperatur enthält diese Strahlung einen enormen Anteil von ultravioletter Strahlung, welche die abgestoßene Gaswolke der Sonne nun zum Leuchten anregt. Da die Geschwindigkeit des Sonnenwindes ständig zunimmt, werden die früher ausgestoßenen Gase durch die späteren eingeholt und oft zu einer kugelförmigen Gasschale komprimiert. Für einen außen stehenden Beobachter erscheinen die leuchtenden Gase in diesem Fall als Ring, der als Planetarischer Nebel bezeichnet wird. Durch das Verflüchtigen des Gases erlischt diese Erscheinung nach einigen 10.000 Jahren wieder, und im Zentrum bleibt der strahlende Rest der Sonne, den man als **Weißer Zwerg** bezeichnet.

7.4.7 Die Neutrinostrahlung der Sonne

Die Photonen geben keinen Einblick in das Innere der Sterne, da sie auf ihrem Weg aus dem Zentrum heraus absorbiert und wieder emittiert werden. Der Absorptionsquerschnitt ist jedoch für Neutrinos sehr gering, so dass sie ungehindert durch die Sonne laufen. Durch Messen dieser Neutrinos könnte man deshalb direkt über die physikalischen Prozesse im Zentrum Aufschluß erhalten. Im Clorexperiment konnte man nur die hochenergetischen Neutrinos messen, mit dem Gallex-Experiment gelingt es nun auch die niederenergetischen Neutrinos der pp-Kette zu messen. Mit SuperKamiokande und weiteren ähnlichen Experimenten gelingt es, die hochenergetischen Neutrinos zu detektieren. Während Davis im Chlorexperiment nur etwa $1/3$ der erwarteten Neutrinos sah, detektiert Gallex immerhin alle Neutrinos der pp-Kette, jedoch immer noch zu wenig im Vergleich zum erwarteten Gesamtfluß an Neutrinos (Abb. 7.24). Dies ist das sog. Sonnenneutrinoproblem. Dies ist eine wichtige Frage im Hinblick auf Tests des Sternaufbaus. Im Zentrum der Sonne laufen Kernfusions-Reaktionen ab, die der Sonne die Energie liefern, die sie seit fast fünf Milliarden Jahren von ihrer Oberfläche abstrahlt. In diesen Reaktionen entstehen Elektron-Neutrinos, die die Sonne ungehindert verlassen und in Detektoren auf der Erde empfangen und gezählt werden können. Alle vier derzeit in Betrieb befindlichen Detektoren messen nur etwa die Hälfte des Neutrinoflusses, wie er von theoretischen Sonnenmodellen vorhergesagt wird. Als Erklärung wird angenommen, dass die Elektron-Neutrinos sich auf ihrem Weg vom Sonnenkern in die Detektoren in die zwei anderen existierenden Neutrinoarten ('Flavour') umwandeln, die weder in Kernreaktionen entstehen noch in den Detektoren gemessen werden können und damit verloren gehen. Die Neutrino-umwandlung von Flavour '1' (z.B. Elektronneutrino) in einen anderen Flavour '2' wird durch

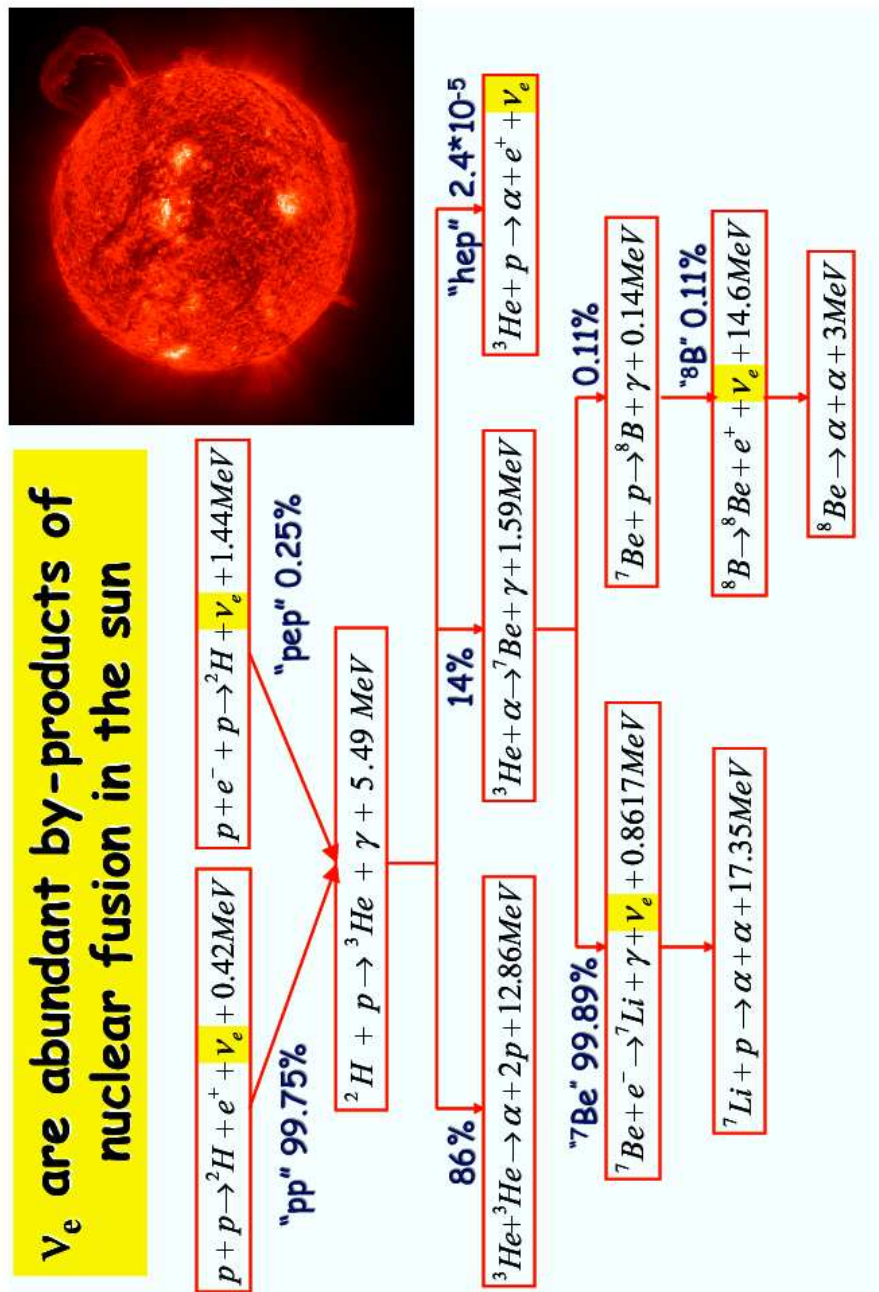


Abbildung 7.22: Neutrinos entstehen in vier verschiedenen Prozessen im Zentrum der Sonne.

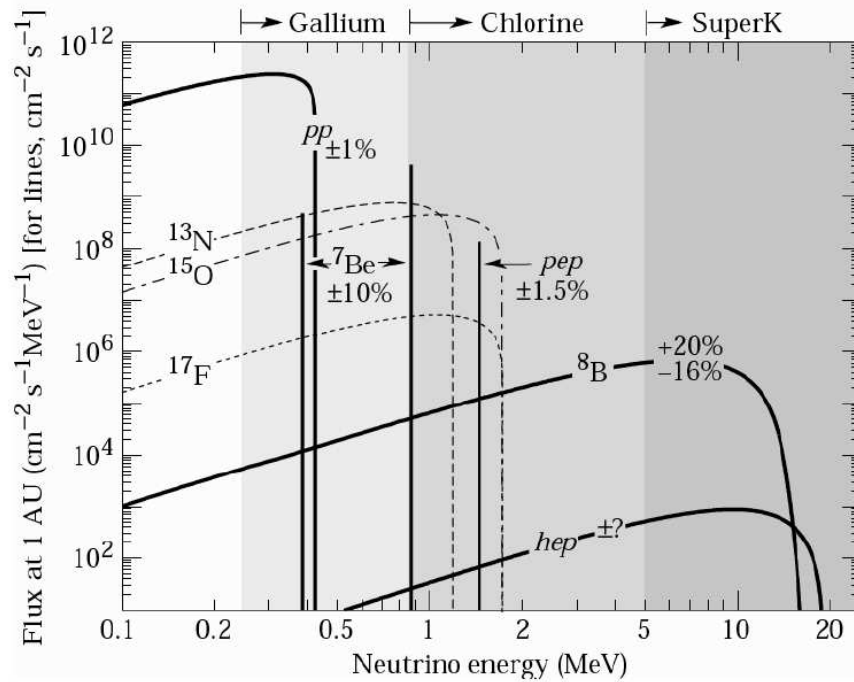


Abbildung 7.23: Das Spektrum der Sonneneutrinos. Quelle: Bahcall (Princeton)

zwei bisher unbekannte Größen bestimmt, die mit Δm_{12}^2 und $\sin^2 2\theta_{12}$ bezeichnet werden (entsprechend Δm_{13}^2 und $\sin^2 2\theta_{13}$ für die Umwandlung von 1 nach 3). Durch Berechnung eines Sonnenmodells, der Zahl und Energieverteilung der emittierten Elektroneneutrinos, der Umwandlung derselben auf ihrem Weg in den Detektor und Simulation der Messungen versuchen die Physiker, die Werte dieser vier Größen zu bestimmen, durch die die Ergebnisse von allen drei Zählexperimenten gleichzeitig erklärt werden können. Darüber hinaus versuchen sie auch die kürzlich im Super-Kamiokande-Experiment bestimmte Energieverteilung der Neutrinos zu reproduzieren. Ohne diese letzte Zusatzinformation können die Zählergebnisse auch durch eine Umwandlung in nur einen anderen Neutrino-Flavour erklärt werden. Aus den Erkenntnissen über die Sonnen-Neutrinos erhalten Teilchenphysiker wichtige Hinweise auf die Physik der kleinsten Bausteine der Welt.

Neutrino-Oszillationen

Die Suche nach Neutrino-Oszillationen ist ein aktuelles Forschungsgebiet der Elementarteilchenphysik. Eng damit verbunden ist die Frage, ob Neutrinos eine Masse besitzen. Sind Neutrinos massive Teilchen, dann besteht die Möglichkeit, dass die Eigenzustände ν_e , ν_μ , ν_τ der schwachen Wechselwirkung nicht mit den Masseneigenzuständen übereinstimmen. Die drei Neutrino-Sorten sind dann Mischungen verschiedener Massezustände. Dies führt dazu, dass ein erzeugtes Neutrino einer bestimmten Sorte bei einer späteren Messung als ein Neutrino einer anderen Sorte identifiziert wird. Betrachtet man zur Vereinfachung nur die Mischung

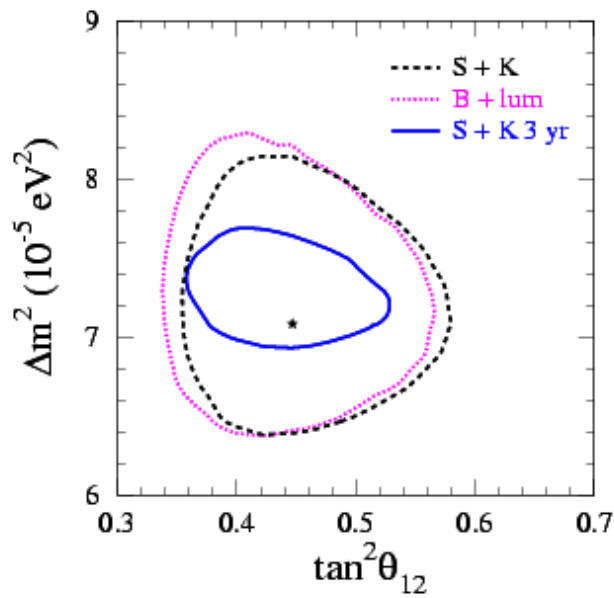
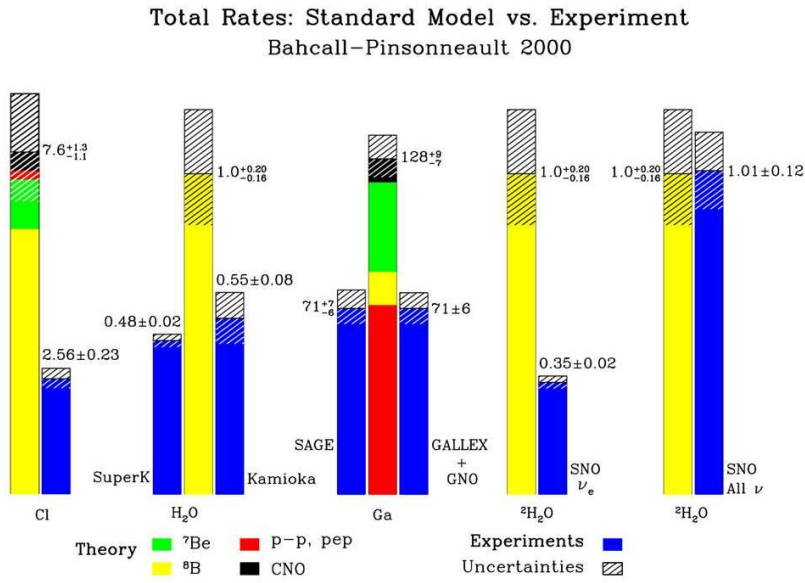


Abbildung 7.24: Zählraten der verschiedenen Neutrino-Experimente mit Vergleich des theoretischen Sonnenmodells (oben). Unten: Die wahrscheinlichsten Werte der Massendifferenz und des Mischungswinkels aus Sonnenneutrino- und SK-Experimenten. Quelle: Bahcall et al. (2003).

zwischen zwei Neutrino-Sorten, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass z.B. ein anfängliches Myon-Neutrino nach einem Weg L ebenfalls als Myon-Neutrino beobachtet wird, im Vakuum ($\hbar = 1 = c$, wie in der Hochenergiephysik üblich)

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - \sin^2 2\Theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4E} L \right). \quad (7.131)$$

Θ ist der sog. Mischungswinkel, Δm^2 die Differenz der quadrierten Massen der Masseneigenzustände und E die Energie der Neutrinos. Die Wahrscheinlichkeit P oszilliert mit dem zurückgelegten Weg. Dabei hängt die Stärke der Oszillation vom Mischungswinkel Θ und die Periode von Δm^2 ab.

Abbildung 7.24 zeigt die Vorhersagen der Messungen von Sonnen-Neutrinos in den vier Experimenten, GALLEX/SAGE, Homestake, Super-Kamiokande (farbige Balken) im Vergleich mit den tatsächlichen Zählraten (graue Histogramme). Die schraffierten Bereiche geben die theoretischen bzw. experimentellen Unsicherheiten in den Raten wieder. Da die Neutrinos in verschiedenen Kernreaktionen mit unterschiedlicher Energie entstehen und die Experimente unterschiedlich empfindlich messen, setzt sich der gemessene Neutrinofluss entsprechend unterschiedlich zusammen (in Abb. 7.24 dargestellt durch verschiedene Farben). So kann Super-Kamiokande praktisch nur die energiereichste Neutrinosorte sehen, während die Gallium-Experimente (GALLEX & SAGE) eine Mischung von Neutrinos aus allen Fusionsprozessen messen. Da die Verhältnisse Messung:Vorhersage für die vier Experimente differieren (aber stets bei etwa 0.5 liegen), legt diese Graphik bereits den Schluß nahe, dass der Mechanismus, der das Defizit bewirkt, energieabhängig ist.

Die Raten aller Neutrinoexperimente liegen wesentlich unter den Vorhersagen aus dem theoretischen Sonnenmodell: 34% für Homestake, 58% für Gallex, 60% für Sage und 46% für Super-Kamiokande. Evidenz für $\nu_e - \nu_\mu$ und $\nu_e - \nu_\tau$ Übergänge hat das **SNO-Experiment** geliefert. In diesem Experiment werden Neutrinos über folgende Reaktionskanäle gemessen:

- Elastische Streuung (ES)

$$\nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^- \quad (7.132)$$

- Neutrale Ströme (NC)

$$\nu_x + d \rightarrow \nu_x + n + p \quad (7.133)$$

- Geladene Ströme (CC)

$$\nu_e + d \rightarrow e^- + p + p. \quad (7.134)$$

Die Schwelle für die CC und ES Reaktionen beträgt 5 MeV. Die NC Reaktion wird mittels Gammas detektiert, die beim Einfang des n an d entsteht mit einer Schwelle von 2.2 MeV. Damit ist dieses Experiment nur auf ${}^8B$ -Neutrinos empfindlich. Die detektierten Raten betragen

$$(\Phi_{\nu_e}^{CC})_{SNO} = (1.76 \pm 0.06) \times 10^6 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad (7.135)$$

und

$$(\Phi_{\nu}^{NC})_{SNO} = (5.09 \pm 0.44) \times 10^6 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}, \quad (7.136)$$

sowie

$$(\Phi_{\nu_e}^{ES})_{SNO} = (2.39 \pm 0.24) \times 10^6 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}. \quad (7.137)$$

Dieser letzte Werte entspricht genau der Detektion im SK-Experiment. Diese Daten sind kompatibel mit der Annahme, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit für Neutrinos bei hohen Energien konstant ist, d.h.

$$\Phi_{\nu_e}^{NC} = \Phi_{\nu_e}^{CC} = \Phi_{\nu_e}^{ES} \quad (7.138)$$

Für den neutralen Strom gilt

$$\Phi_{\nu}^{NC} = \Phi_{\nu_e}^{NC} + \Phi_{\nu_{\mu,\tau}}^{NC}. \quad (7.139)$$

Dies ist direkte Evidenz dafür, dass Neutron-Oscillationen vorliegen.

Diese Resultate zusammen mit den Reaktor-Neutrino-Experimenten (KamLand) ergeben dann folgende wahrscheinlichsten Werte für die Massendifferenz (Abb. 7.24) ³

$$\Delta m_{12}^2 = 7 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (7.140)$$

und für den Mischungswinkel

$$\tan^2 \Theta_{12} = 0.44. \quad (7.141)$$

Während hochenergetische Neutrinos nur Vakuum-Oscillationen erleiden, unterliegen niederenergetische Neutrinos auch Materieeffekten (sog. MSW-Effekt). Dies ist eine kollektive Wechselwirkung in dichter Materie, wie etwa dem Sonneninnern.

7.4.8 Die Aktive Sonne

Die Sonne besitzt außerordentlich starke Magnetfelder, die durch die Strömung der elektrisch leitenden Plasmen hervorgerufen werden. Die Leitfähigkeit des Plasmas im Sonneninnern entspricht dem von Kupfer bei Zimmertemperatur. In der Sonne zirkulieren elektrische Ströme in einer Größenordnung von 10^{12} Ampere. Das Innere der Sonne wirkt somit wie ein gigantischer Dynamo, der die Bewegungsenergie eines elektrischen Leiters in elektrische Energie und ein Magnetfeld umwandelt. Man geht derzeit davon aus, dass dieser Dynamoeffekt nur in einer dünnen Schicht am Boden der Konvektionszone wirksam ist.

Sichtbare Auswirkungen der Magnetfelder sind die **Sonnenflecken** und die Protuberanzen. Sonnenflecken sind relativ kühle Bereiche der Sonnenatmosphäre. Ihre Temperatur liegt zwischen 3700 und 4500 K. Durch spektroskopische Untersuchungen konnte festgestellt werden, dass im Bereich der Sonnenflecken starke Magnetfelder vorherrschen. Die Spektrallinien von Elementen, die normalerweise bei einer Wellenlänge liegen, erscheinen bei Anwesenheit eines Magnetfeldes dreigeteilt (Zeeman-Effekt), wobei der Abstand der Linien proportional zur Stärke des Feldes ist. Die Magnetfeldstärke im Umfeld der Sonnenflecken kann bis zu 0,3 Tesla (3000 Gauss) betragen und ist somit tausendmal stärker als das irdische Magnetfeld an der Erdoberfläche. In der Sonne bewirken die Magnetfelder eine Hemmung der Konvektionsströmungen, so dass weniger Energie nach außen transportiert wird. Die dunkelsten und kühlgsten Zonen auf der Sonne sind somit die Orte mit den stärksten Magnetfeldern.

³s. die Analyse von Bahcall et al. astro-ph/0305159 (2003)



Abbildung 7.25: Sonnenflecken.

Die Gesamtzahl der Sonnenflecken unterliegt einem Zyklus von rund elf Jahren (Abb. 7.26). Während eines Fleckenminimums sind kaum Sonnenflecken sichtbar. Mit der Zeit bilden sich zunehmend Flecken in einem Bereich von 30 Grad nördlicher und südlicher Breite aus. Diese aktiven Fleckengürtel bewegen sich zunehmend in Richtung Äquator. Nach etwa fünfeinhalb Jahren ist das Maximum erreicht und die Zahl der Flecken nimmt langsam wieder ab. **Nach einem Zyklus hat sich das globale Magnetfeld der Sonne umgepolt.** Der vorher magnetische Nordpol ist jetzt der magnetische Südpol.

Die genauen Ursachen für den elfjährigen Zyklus sind noch nicht vollständig erforscht. Derzeit geht man von folgendem Modell aus: Zu Beginn eines Zyklus, im Minimum, ist das globale Magnetfeld der Sonne bipolar ausgerichtet. Die Magnetfeldlinien verlaufen geradlinig über den Äquator von Pol zu Pol. Durch die differenzielle Rotation werden die elektrisch geladenen Gasschichten gegeneinander verschoben, wobei die Magnetfelder zunehmend gestaucht, verdreht und verdrillt werden. Die Magnetfeldlinien ragen zunehmend aus der sichtbaren Oberfläche heraus und verursachen die Bildung von Flecken und Protuberanzen. Nach dem Fleckenmaximum richtet sich das Magnetfeld wieder neu aus.

Seit Mitte des 20. Jahrhunderts befindet sich die Sonne in einer ungewöhnlich aktiven Phase. Die Sonnenaktivität ist demnach etwa doppelt so hoch wie der langfristige Mittelwert, und höher als jemals in den vergangenen 1000 Jahren. Ein internationales Forscherteam hat die Sonnenaktivität der vergangenen Jahrtausende untersucht. Seit dem Ende der letzten Eiszeit war die Sonne demnach selten so aktiv wie seit den 1940er-Jahren bis heute. Wie Wissenschaftler aus Deutschland, Finnland und der Schweiz in der Zeitschrift *Nature* (28.10.2004)

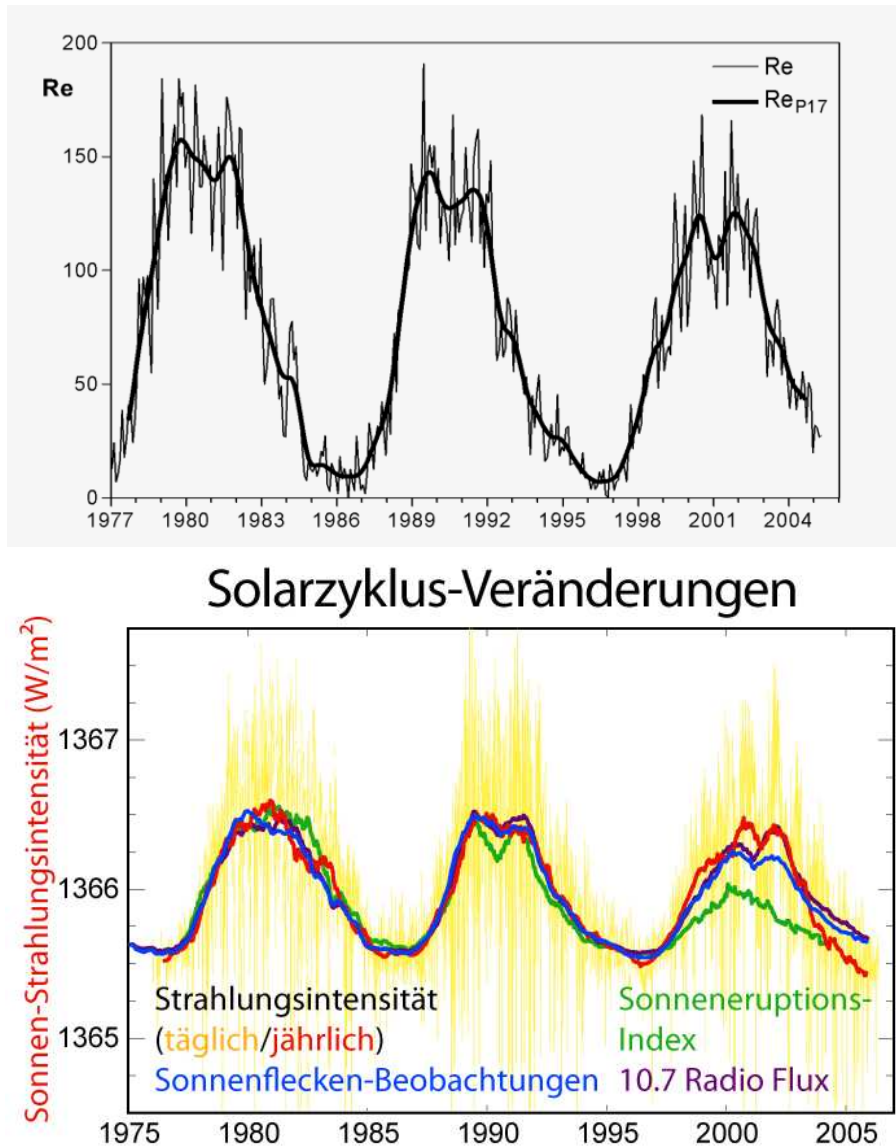


Abbildung 7.26: Oben: Sonnenfleckenzustatistik in den Jahren 1977 bis 2004. Unten: Veränderung der Solarkonstante.

berichten, muss man über 8.000 Jahre in der Erdgeschichte zurückgehen, bis man einen Zeitraum findet, in dem die Sonne im Mittel ebenso aktiv war wie in den vergangenen 60 Jahren. Forscher um Sami Solanki vom Max-Planck-Institut (MPI) für Sonnensystemforschung in Katlenburg-Lindau haben die Sonnenaktivität anhand von schweren Kohlenstoff-Atomen ($C-14$ -Teilchen) zurückverfolgt. Aus dem Studium früherer Perioden mit hoher Sonnenaktivität sagen die Forscher voraus, dass die gegenwärtig hohe Aktivität der Sonne wahrscheinlich nur noch wenige Jahrzehnte andauern wird.

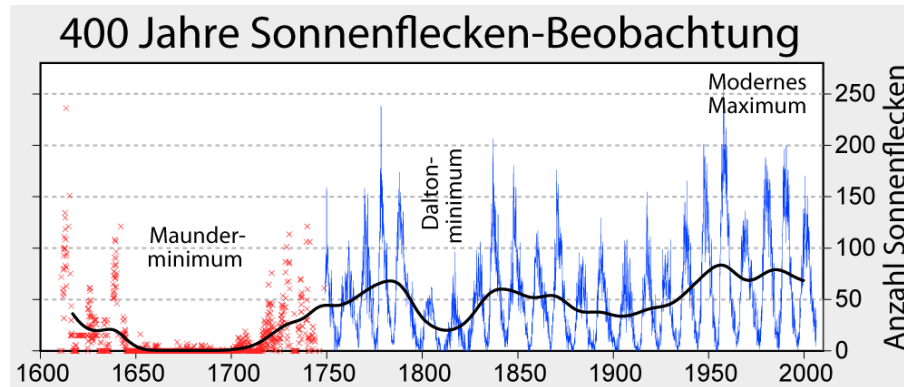


Abbildung 7.27: Sonnenflecken und Maunder Minimum. Als Maunderminimum wird eine Periode stark verringerter Sonnenfleckenaktivität in den Jahren zwischen 1645 und 1715 bezeichnet. Das Maunderminimum fiel mit den kältesten Jahren der Kleinen Eiszeit zusammen, während der in Europa, Nordamerika und China viele sehr kalte Winter auftraten. Aufzeichnungen aus anderen Teilen der Welt sind leider nicht detailliert genug, um diese Aussage zu verallgemeinern.

Diese Befunde rücken die Frage, welcher Zusammenhang zwischen den Schwankungen der Sonnenaktivität und dem Klima auf der Erde besteht, in den Brennpunkt der aktuellen Forschung. Auf der Erde spielt der Einfluss der Sonne - neben der Emission des Treibhausgases Kohlendioxid aus der Verbrennung von Kohle, Gas und Öl - eine zunehmende Rolle als Ursache für die seit 1900 beobachtete globale Erwärmung. Wie groß diese Rolle genau ist, muss noch erforscht werden, denn auch nach unseren neuen Erkenntnissen über die Schwankungen des solaren Magnetfelds ist der seit 1980 eingetretene starke Anstieg der Erdtemperatur wohl vor allem dem durch das Kohlendioxid bewirkten Treibhauseffekt zuzuschreiben (sagt Prof. Sami K. Solanki, Sonnenphysiker und Direktor am Max-Planck-Institut für Sonnensystemforschung).

Ungereimtheiten: Bei statistischen Untersuchungen stellt man fest:

Milde Winter treten häufig im 1. Jahr vor dem Sonnenflecken-Maximum, im 3. Jahr nach dem Maximum und im 2. Jahr vor dem Minimum auf;

Kalte Winter im 1. Jahr nach dem Sonnenflecken-Maximum, sowie im Jahr des Flecken-Minimums und im 1. Jahr danach. In den Jahren 1650 bis 1715 blieben die Sonnenflecken ganz aus. Diese Jahre waren durch sehr niedrige Temperaturen gekennzeichnet (Kleine Eiszeit).

Kann man dies verstehen?

7.4.9 Der Sonnenwind

Ohne Sonne wäre die Erde kalt und tot. Doch kommen von ihr auch Strahlen, die das gerade entstandene Leben sofort wieder vernichten würden. Die Erde besitzt aber ein sehr wirkungsvolles Schutzschild, das sie vor diesem Verderben schützt. Lange wusste man überhaupt nichts von dieser Gefahr, die von der Sonne ausgeht. Allerdings vermuteten schon die Gelehrten im alten China, dass die Sonne eine Substanz abstrahlen muss, denn ihnen war aufgefallen, dass die Schweife aller Kometen stets von der Sonne wegzeigen. Daher vermuteten sie so etwas

wie einen Sonnenwind. Erst 1947 erkannte der deutsche Physiker Ludwig Biermann, dass es solare Materie sein muss, die die Plasmaschweife von Kometen in eine Richtung zwingt. Tatsächlich emittiert die Sonne einen Partikelstrom, der für das Leben auf der Erde tödlich wäre. Wie schützt sich die Erde vor diesem Bombardement von der Sonne? Es ist das Magnetfeld, dass den tödlichen Partikelstrom um die Erde lenkt. 1962 startete die amerikanische Raumsonde Mariner-2 zum Planeten Venus. An Bord befand sich ein Detektor, der messen sollte, ob von der Sonne wirklich Teilchen kommen. Die Signale, die Mariner-2 auffing, ließen keinen Zweifel mehr zu: Der Weltraum ist angefüllt mit einem Sonnenwind, der mit einer Geschwindigkeit bis zu 800 km/Sekunde in alle Richtungen abgestrahlt wird.

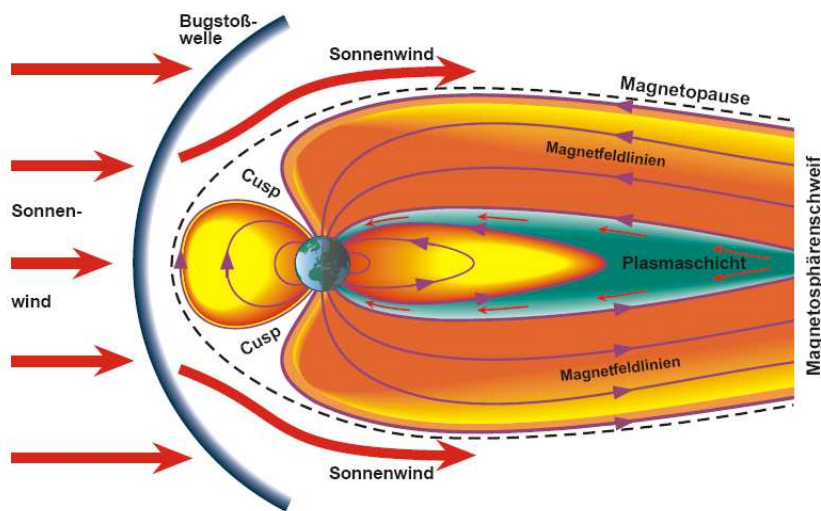


Abbildung 7.28: Der Sonnenwind trifft auf die Erdmagnetosphäre.

Das dipolartige Magnetfeld der Erde wird durch den Sonnenwind verformt, und zwar auf der sonnenzugewandten Seite (Tagseite, im Bild links) zusammengestaucht und auf der sonnenabgewandten Seite (Nachtseite, im Bild rechts) zu einem langen Magnetosphärenschweif gestreckt.

Anhang A: Die Eddington Leuchtkraft

Wenn der Energietransport an der Oberfläche eines Sterns durch Strahlung dominiert wird, dann gilt für die Leuchtkraft des Sterns

$$L_* = 4\pi R^2 F_r = -\frac{16\pi ac}{3\rho\kappa_R} R^2 T^3 \frac{dT}{dr}. \quad (7.142)$$

Andererseits gilt $dP/dT = 4aT^3/3$. Daraus folgt über das hydrostatische Gleichgewicht die Eddington Leuchtkraft

$$L_* \equiv L_{ED} = \frac{4\pi GcM}{\kappa_{es}} \propto M, \quad (7.143)$$

die nur mit der Masse skaliert. Die Eddington–Leuchtkraft in Einheiten von Sonnenleuchtkräften für Massen in Einheiten von Sonnenmassen beträgt dann

$$L_* = L_{ED} = 33.000 L_\odot (M/M_\odot). \quad (7.144)$$

Welche Bedeutung hat dies für die Masse–Leuchtkraft Relation der Sterne ?

Anhang B: Polytrope Sterne

Unter gewissen Bedingungen entkoppelt das mechanische Gleichgewicht der Sterne vom thermischen Gleichgewicht. Dann hängt die Zustandsgleichung nur von der Dichte ab, $P = P(\rho)$. Dies ist der Fall bei Entartungsdruck der Elektronen, bei Strahlungsdruck–dominierten Sternen und bei voll konvektiven Sternen (adiabatisch). Speziell für polytrope Zustandsgleichungen $P = K\rho^{1+1/n}$ kann das hydrostatische Gleichgewicht mittels der Transformationen $\rho = \rho_c \theta^n$ und $r = a\xi$ auf die Form der Lané–Emden Gleichung gebracht werden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (7.145)$$

Berechnen Sie die Lösung für $n = 1$ und berechnen Sie den Radius ξ_* . Zeigen Sie, dass die Zentraldichte folgt, $\theta(\xi_*) = 0$,

$$\rho_c = \frac{1}{4\pi} \xi_* \left(-\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_*}^{-1} \frac{M}{R^3}, \quad (7.146)$$

der Zentraldruck

$$P_c = \frac{1}{4\pi(n+1)} \left(-\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_*}^{-2} \frac{GM^2}{R^4} \quad (7.147)$$

und die Zentraltemperatur

$$T_c = \frac{\mu m_u}{(n+1)k_B} \left(-\xi \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_*}^{-1} \frac{GM}{R}. \quad (7.148)$$

Werten Sie diese Parameter numerisch aus für M in Einheiten von Sonnenmassen und R in Einheiten von Sonnenradien. Betrachten Sie einen Stern, der voll konvektiv ist bis auf eine dünne Atmosphäre mit dem Druck der Photosphäre $P_* = (2/3)GM/(\kappa R^2)$, wobei $\kappa = \kappa_0 P^a T^b$ gelten soll. Drücken Sie P_* durch T_{eff} aus und schätzen Sie $T_{\text{eff}} = T_{\text{eff}}(M, L)$ für $n = 3/2$ und kühle Atmosphären ab, in denen die H^- -Opazität dominiert ($a = 1/2$ und $b = 17/2$).

Vertiefung

HR Diagramm und Spektralklassifikation

Sternradien im HRD: Erstellen Sie ein HR Diagramm mit $\log(T_{\odot}/T_{\text{eff}})$ als Abszisse und $\log(L/L_{\odot})$ als Ordinate. Zeichnen Sie die Hauptreihe ein. Zeichnen Sie Kurven zu konstanten Sternradien für $R = 0.01 R_{\odot}$ bis $R = 300 R_{\odot}$. Bestimmen Sie die Position im HRD und die Radien folgender Sterne

Stern	Sir A	Sir B	AG Car	HD104494	Pollux	Betegeuze	Capella	Vega
T_{eff} [K]	9910	25000	25000	26000	4750	3450	5200	9500
$L/L_{\odot}$	23.5	0.03	1000000	300000	60	55000	40	54.0

Anregung der Wasserstofflinien:

- Erstellen Sie einen Graph des Ionisationsverhältnisses N_{II}/N_I als Funktion der Temperatur T für eine reine Wasserstoff-Atmosphäre mit Elektronendichte n_e

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{1}{n_e} \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp(-\chi_I/k_B T) \quad (7.149)$$

wenn $\chi_I = 13.6 \text{ eV}$, $\chi_2 = E_2 - E_1$ und $n_e = k_B T/P_e$ zu gegebenem Elektronendruck P_e .

- Zur Emission der Balmerlinien müssen die Atome im ersten angeregten Zustand sein. Erstellen Sie einen Graph des Verhältnisses N_2/N als Funktion der Temperatur. Bei welcher Temperatur fällt dieses Verhältnis maximal aus?

Das Spektrum des PG Quasars 1634+706

Mit optischen Teleskopen, mit dem ISO-Satelliten und mit einem Submm-Teleskop wurden für den Quasar PG 1634+706, der eine Rotverschiebung von $z = 1.334$ aufweist, folgende Strahlungsströme gemessen:

- Erstellen Sie ein **Spektrum** (doppelt logarithmisch) $\lambda F_{\lambda} = \nu F_{\nu}$ als Funktion der Wellenlänge λ . Interpretieren Sie das Spektrum.
- Erstellen Sie ein **Spektrum der Energieverteilung** $L_{\nu} = 4\pi d^2(z) \nu F_{\nu}$ als Funktion der Frequenz ν (doppelt logarithmisch). $d(z) \equiv 2(c/H_0)(1 + z - \sqrt{1+z})$ ist die kosmologische Leuchtkraftdistanz zur Hubble-Konstanten $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$ eines flachen Friedmann-Universums. Schätzen Sie die Infrarot-Leuchtkraft und die UV-optische Leuchtkraft ab.

λ [μm]	0.338	0.377	0.578	0.7277	0.824	1.27	1.65	2.23
F_ν [mJansky]	0.81	0.85	0.89	0.90	0.94	0.88	0.93	0.87

λ [μm]	11.5	25.0	60.0	100.0	150.0	200.0	1300.0
F_ν [mJansky]	48.0	120.0	267.0	349.0	230.0	158.0	1.2

- Die gesamte Infrarotstrahlung ist Staubstrahlung zu verschiedenen Temperaturen. Staub strahlt im thermodynamischen Gleichgewicht mit der Einstrahlung wie folgt: $F_\nu \propto \kappa_\nu B_\nu(T)$. Für geringe Frequenzen gilt für die Staub-Opazität κ_ν : $\kappa_\nu \propto \nu^2$, falls $\nu < 10^{13}$ Hz. Ermitteln Sie die minimale Staubtemperatur T_D , die mit diesen Daten verträglich ist. Wo liegt die maximale Staubtemperatur?
- Das UV-optische Spektrum des Quasars wird durch die Akkretionsscheibe um das zentrale Schwarze Loch erzeugt. Die Effektiv-Temperatur einer Scheibe nimmt mit zunehmendem Radius R ab: $T_{\text{eff}}(R) = T_*(R/R_*)^{-3/4}$. R_* bezeichnet den Innenradius der Scheibe, T_* die entsprechende Temperatur. Zeigen Sie, dass die Leuchtkraftverteilung einer optisch dicken Scheibe sich wie folgt verhält (Summe über Ringe)

$$L_\nu = \int_{R_*}^{R_a} 2\pi R B_\nu[T_{\text{eff}}(R)] dR \propto \nu^{1/3} \int_1^{x_a} \frac{x^{5/3}}{\exp x - 1} dx. \quad (7.150)$$

Zeigen Sie, dass das Spektrum des Quasars PG 1634+706 mit einem typischen Scheibenspektrum $F_\nu \propto \nu^{1/3}$ verträglich ist. Wo liegt die maximale Scheibentemperatur unter der Annahme, dass der Staub durch die Strahlung der Akkretionsscheibe aufgeheizt wird? Wie muß der Staub geometrisch verteilt sein?

- Bestimmen Sie eine minimale Masse des Schwarzen Lochs unter der Annahme, dass die gesamte Strahlung der Akkretionsscheibe die **Eddington-Leuchtkraft** nicht übertreffen kann.

8 Supernovae und Kompakte Objekte

Alle Sterne, die genügend Masse besitzen, Kernfusionen zu zünden ($M > 0.075 M_{\odot}$) haben ein endliches Alter und hinterlassen am Ende ihrer Entwicklung gewisse Relikte. Die Dauer ihrer Entwicklung ist umso kürzer, je größer die Masse des Sterns. Unsere Milchstraße enthält insgesamt

- etwa 100 Milliarden Sterne; die typische Masse liegt im Bereich von 0.5 - 0.08 Sonnenmassen (Abb. 8.1). Es gibt sehr wenige Sterne mit Massen oberhalb einer Sonnenmasse.
- etwa 10 Milliarden Weiße Zwerge; nur Sterne mit einer Anfangsmasse von mehr als 0.8 Sonnenmassen konnten sich bisher überhaupt zu Weißen Zwergen entwickeln.
- mindestens 100 Millionen Neutronensterne mit typischer Masse von 1.4 Sonnenmassen;
- etwa 100.000 stellare Schwarze Löcher mit Massen von 3 bis 50 Sonnenmassen;
- genau ein supermassereiches Schwarzes Loch im Zentrum der Milchstraße mit einer Masse von 4 Millionen Sonnenmassen.

8.1 Entwicklung massearmer Sterne

Sterne unter 8 Sonnenmassen entwickeln sich langsam zum Roten Riesen und enden dann als Weiße Zwerge. Die meiste Masse wird in der AGB-Phase abgestossen.

8.1.1 Vom Roten Riesen zum Weißen Zwerg

Abbildung 8.2 zeigt den Lebensweg von massearmen Sternen, wie sie in Kugelsternhaufen zu finden sind. Er beginnt mit einer sehr langen ruhigen Zeit auf der Hauptreihe. Für Milliarden von Jahren verbrennt im Innern Wasserstoff zu Helium, der Stern verändert sich praktisch nicht. Im Kern wird aber das Verhältnis von Brennstoff (Wasserstoff) zu Asche (Helium) immer ungünstiger, so dass die nukleare Energierzeugung mit der Abstrahlung nicht mehr Schritt halten kann. Der Kern beginnt zu schrumpfen und wird dabei heißer. Der Wasserstoff kann nun auch in einer Schale verbrannt werden, die Kernreaktionen fressen sich in einer dünnen Schicht nach außen. Die äußeren Schichten blähen sich dadurch auf, der Stern wird zum Roten Riesen. Er bewegt sich im HRD horizontal nach rechts, d.h. die Leuchtkraft bleibt konstant, die Oberfläche wird kühler. Schließlich erreicht er die Hayashi-Linie, die er nicht überschreiten kann. Beim weiteren Aufblähen muß er deshalb auf der HL nach oben wandern, wird bei nahezu konstanter Oberflächentemperatur immer heller. In den Farben-Helligkeitsdiagrammen von Kugelsternhaufen sieht man sehr gut die Zweiteilung des Riesenastes in Horizontalast und einen sehr steilen Teil.

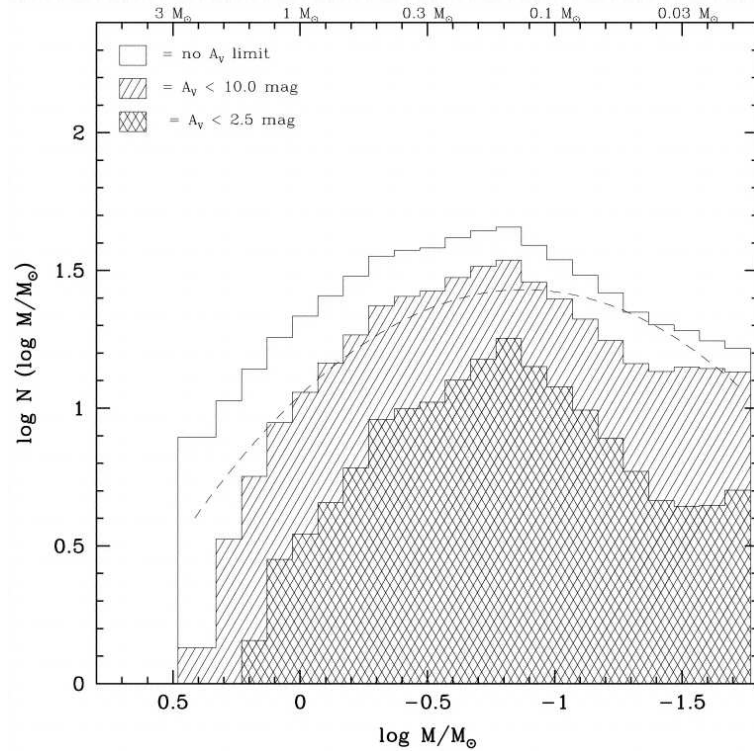


Abbildung 8.1: Massenspektrum in der Orion Molekülwolke für verschiedene Extinktionsannahmen. Die Empfindlichkeitsgrenze liegt bei 0.02 Sonnenmassen. Die Massenverteilung weist ein Maximum bei etwa 0.15 Sonnenmassen auf. Unterhalb von 0.08 Sonnenmassen sind sehr viele Braune Zwerge zu beobachten. Die meisten Sterne entstehen im Massenbereich unterhalb einer Sonnenmasse. Quelle: Hillenbrand et al. 2000

Der schrumpfende Heliumkern erreicht schließlich 100 Mio. K, wo nun das Heliumbrennen schlagartig beginnt. Diese Heliumkerne sind nicht konvektiv. Diese Sterne haben jedoch so hohe Dichten, dass Entartung vorherrscht. Der He-Kern ist entartet und isotherm, da die Wärmeleitung besonders gut in entarteter Materie ist. Wenn die Temperatur 100 Mio. K erreicht, setzt der 3α -Prozeß ein. Dieses He-Brennen setzt gleichzeitig im ganzen He-Kern ein und erhöht damit die Temperatur. Der entartete Kern kann jedoch nicht expandieren, so dass die Temperatur weiter steigt und die nuklearen Prozesse beschleunigt werden. Bei genügend hoher Temperatur wird die Entartung aufgehoben – der Stern expandiert nun explosionsartig: sog. He-Flash, der bereits einige Sekunden nach dem Zünden von He auftritt.

Dieser Heliumblitz treibt den Stern in kurzer Zeit vom oberen Ende seines Hayashi Pfades wieder nach links unten. Diese Energie wird jedoch in der Hülle abgefangen, so dass der Stern nicht zerrissen wird. Die Leuchtkraft des Sterns sinkt im Flash. Der Stern findet eine neue Gleichgewichtslage, bei der nun He in C nichtentartet verbrennt: sog. *horizontale Riesenast* im HRD. Dieser wird erst nach etlichen solchen Oszillationen erreicht. Hier besteht der Stern aus einem homogenen nichtentarteten He-Kern umgeben von einer Wasserstoff-Hülle. Die metallreichen Sterne bilden einen auffälligen Klumpen im HRD (Abb. ??), während die me-

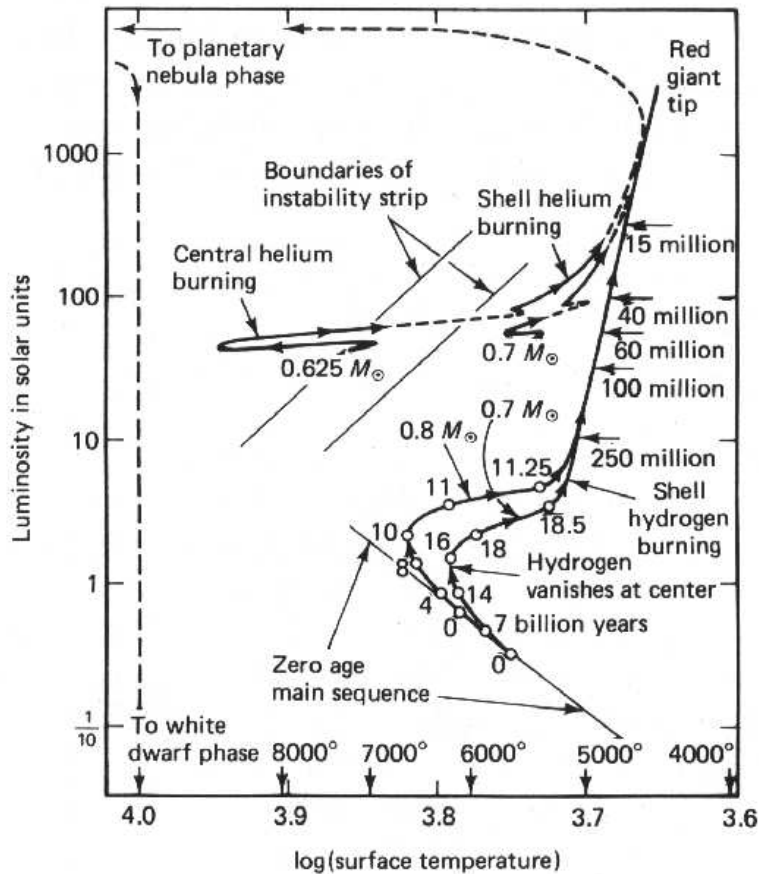


Abbildung 8.2: Berechnete Entwicklungswege von massearmen Sternen. Im Instabilitätsstreifen sind die RR Lyrae Sterne zu finden.

tallarmen Sterne (Kugelsternhaufen) sich auf dem Horizontalast verteilen. Die Erzeugung von Kohlenstoff und Sauerstoff aus Helium ist weit weniger energiereich als das Wasserstoffbrennen. Die Verweildauer auf dem Horizontalast ist deshalb kürzer als das Hauptreihenstadium.

Wenn das He im Kern verbrannt ist, gibt es zwei Schalen, in der äußeren brennt Wasserstoff, in der inneren Helium. Solche Konfigurationen sind instabil und der Stern wirft Material in Form von **planetarischen Nebeln** ab. Die äußeren Schichten des Sterns blähen sich wieder enorm auf. Der Stern wandert nun den sog. *Asymptotischen Riesenast* (AGB) hinauf. Diese AGB Zeit ist sehr kompliziert und bisher nicht gut verstanden. Die beiden Brennschalen stören sich und schalten sich gegenseitig an und aus. Der Stern reagiert mit Aufblähen und Schrumpfen und beschreibt deshalb Schlenker im HRD (sog. 'loops').

Die beiden Brennschalen wandern nun immer weiter nach außen, Material geht verloren. Damit fehlt dem Stern der notwendige Druck, um die Kernreaktionen in Gang zu halten. Es setzt ein Schrumpfen ein, die sog. post-AGB-Phase, bei der er nach links wandert und die

Hauptreihe kreuzt im Bereich der B-Sterne und erreicht das Gebiet der Zentralsterne von planetarischen Nebeln. Durch Auskühlen wandert der Stern nun mit konstantem Radius nach rechts unten auf der Sequenz der **Weissen Zwerge**. Sterne mit weniger als $3 M_{\odot}$ können C nicht zünden. Im Zentrum der planetarischen Nebel bleibt ein Weißer Zwerg zurück.

8.1.2 Die zeitliche Entwicklung der Sonne

Über keinen andern Stern liegen so viele Beobachtungsdaten vor wie für die Sonne. Die zeitliche Entwicklung der Sonne ist mit diesen Daten neu gerechnet worden¹. Das Modell ergibt die richtige Effektivtemperatur und die richtigen Elementhäufigkeiten zum heutigen Zeitpunkt.

Die Entstehung der Sonne beginnt mit der Kontraktion aus einer Molekülwolke vor 4,55 Milliarden Jahren. Dieses Alter entspricht dem der ältesten Meteorite, die sich gleichzeitig mit der Sonne gebildet haben. Die Kontraktion bis zum Hauptreihenstadium dauerte 50 Mio. Jahre (Punkt A im HRD). Bis heute stieg die Leuchtkraft um 30% an, der Radius nahm um 10% zu. Dieser Trend hält weiter an, bis der Wasserstoff im Zentralbereich vollständig verbraucht ist (D). Hier verläßt die Sonne die Hauptreihe, der Wasserstoff beginnt in Schalen zu brennen (E). Hier besitzt die Sonne eine Leuchtkraft von $2.2 L_{\odot}$ und ist 11 Milliarden Jahre alt. Bei einer konstanten Leuchtkraft von $2.3 L_{\odot}$ bläht sie sich auf und wird in einem Zeitraum von 700 Mio. Jahren zum Roten Riesen (E nach F). Hier setzt ein starker Wind ein, der 30% der Masse kostet. Die Instabilitäten im Schalenbrennen treiben die Sonne die HL hinauf bis zu einer Leuchtkraft von $2349 L_{\odot}$ (H).

In der Zwischenzeit ist der Kernbereich auf eine Dichte von 1 Mio. g cm^{-3} kontrahiert, die Temperatur auf 100 Mio. K angestiegen. Heliumfusion setzt ein (H), die zu Leuchtkraftschwankungen führt. Diese beruhigen sich nach etwa 1 Mio. Jahren, die Sonne erreicht den Horizontalast (J bis K). Hier verbleibt sie bei einer Leuchtkraft von $44 L_{\odot}$ während 100 Mio. Jahren. Erreicht sie den Punkt L, so ist auch Helium erschöpft, und der erloschene Kohlenstoff-Sauerstoff-Kern kontrahiert und entartet. Es setzt nun wieder Heliumschalenbrennen ein, sie erreicht den horizontalen Riesenast. Es kommt zu Ausbrüchen im Heliumschalenbrennen und zu einem erneuten Massenverlust, der weitere 20% der Masse kostet. Die Sonne ist nun von einem Planetarischen Nebel umgeben. Diese Restsonne, die nun nur noch etwa die Hälfte der Masse besitzt, kühlt als CO Weißer Zwerg aus. Er hat einen Radius von rund 10'000 km. Bis zu diesem Zeitpunkt währte das Leben der Sonne 12.5 Milliarden Jahre.

8.2 Entwicklung massereicher Sterne

Nach dem zentralen Wasserstoffbrennen weist der Stern einen He-Kern auf, der praktisch isotherm ist. Die zeitliche Entwicklung für einen Stern mit $5 M_{\odot}$ ist in Abb. 8.5 gezeigt. Der konvektive Wasserstoffkern brennt sich in 56 Mio. Jahren leer. Dabei bewegt sich der Stern von der Hauptreihe weg nach rechts. Die Entwicklung in das Stadium der Roten Riesen erfolgt sehr rasch innerhalb von nur 3 Mio. Jahren: Energiemangel führt zu einer schnellen Kontraktion des Kerns auf der KH-Zeitskala. Dabei wird thermische Energie aus der Gravitationsenergie gewonnen, bis die Zündungstemperatur des He-Brennens erreicht ist (D). Dabei expandiert die Hülle und gleichzeitig brennt H in der Schale. Nachdem im Zentralgebiet ein erheblicher Teil von He zu C und O verbrannt ist, nimmt die Leuchtkraft erneut zu (L). Der

¹Sackmann et al., *Astrophys. J.* **418**, 457 (1993); Bahcall, Pinsonneault & Brasu, *Astrophys. J.* **555**, ... (2001).

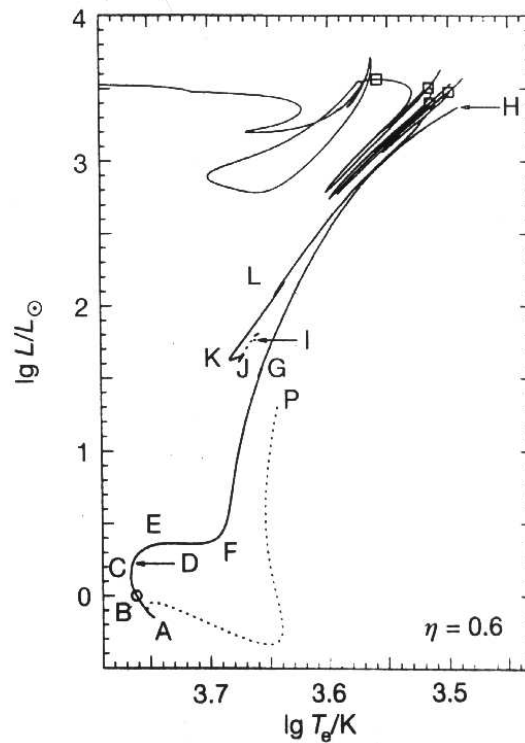


Abbildung 8.3: Zeitliche Entwicklung der Sonne im HRD. Heute befindet sie sich im Punkt B.

Punkt L wird nach 80 Mio. Jahren erreicht. Über dem CO-Kern und 2 Schalenquellen besitzt der Rote Überriese nun eine ausgedehnte Konvektionszone.

8.3 Endphasen der Sternentwicklung

8.3.1 Planetarische Nebel und Weiße Zwerge

Planetarische Nebel² sind ein Entwicklungsprodukt der Sterne mit Massen $M < 8 M_{\odot}$. Diese Gasnebel sind Hüllen von Roten Riesensternen, die mit Entweichgeschwindigkeiten von 10 – 30 km/s abgeworfen werden. In dieser Phase des asymptotischen Riesenstadiums durchläuft der Stern mehrere Helium **shell flashes**. Dies sind thermische Ausbrüche eines heftigen Helium-Schalenbrennens, die dazu führen, dass die äußere Hülle des Sterns abgesprengt wird. Es bleibt im Zentrum ein heißer Weißer Zwerg zurück (Abb. 8.7).

Bei Sternen mit $3 - 8 M_{\odot}$ wird entweder C oder O explosiv im Kern gezündet: C- und O-Flashes. Die Sterne werden wahrscheinlich völlig zerrissen. Sterne mit mehr als $8 M_{\odot}$ durchlaufen alle Brennphasen und bauen einen Fe-Ni Kern auf. Diese Sterne enden als Supernovae, in deren Zentrum ein Neutronenstern und bei sehr massereichen Sternen ein Schwarzes Loch zurück bleibt.

²Der Begriff Planetarischer Nebel hat nichts mit Planeten zu tun !

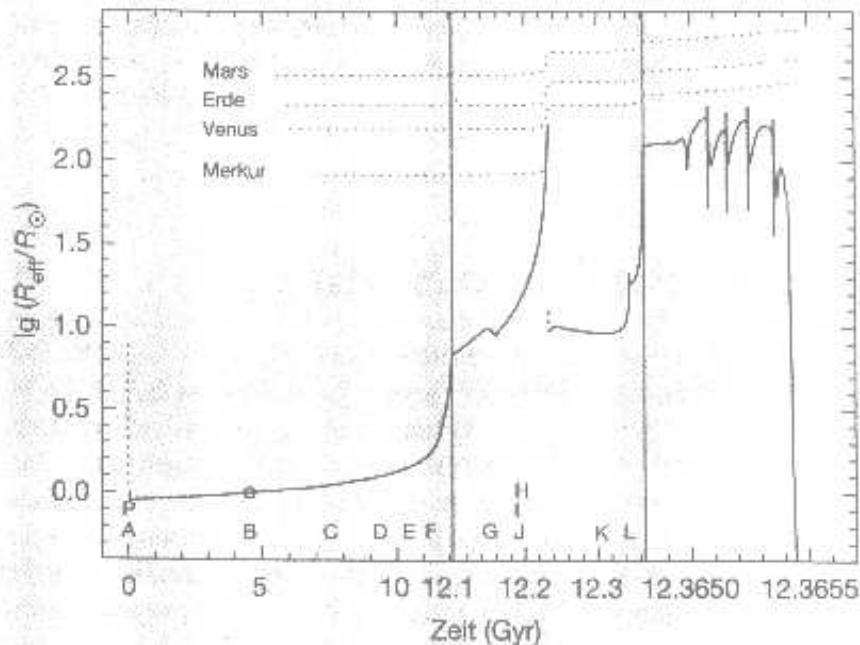


Abbildung 8.4: Entwicklung des Sonnenradius als Funktion der Zeit.

8.3.2 Supernovae und Hypernovae

Supernovaexplosionen sind die bei weitem energiereichsten Ereignisse in unserer kosmischen Nachbarschaft. Sie sind für die Entstehung der meisten chemischen Elemente verantwortlich und bestimmen ganz wesentlich den Energiehaushalt der Materie zwischen den Sternen.

Man unterscheidet Supernovae in zwei Klassen (grob, es gibt inzwischen noch weitere Unterklassen), die Typen SN I und SN II.

- **Supernova Typ I**

Im Spektrum solcher Supernovae findet sich **kein Wasserstoff**, was bedeutet, dass SN I diesen bereits vor der Supernovaexplosion verloren (fusioniert) haben muß. Man vermutet heute, dass ähnlich wie bei den Novae ein 'normaler' Stern, meist ein massereicher Roter Riese, von einem Weißen Zwerg begleitet wird. Dieser kompakte, überwiegend aus Kohlenstoff und Sauerstoff bestehende Stern saugt von seinem Begleiter ständig Materie ab. Sie spiraliert dann in einer Akkretionsscheibe auf den Kern herunter, dessen Masse dementsprechend laufend zunimmt. Zwar schleudert der Weiße Zwerg einen Teil dieser Masse während der Nova-Explosion in den Raum, auf Dauer gesehen wird er aber an Substanz zunehmen, da ein Rest an Helium-Asche zurückbleibt. Im Laufe der Zeit steigen damit seine Dichte und seine Temperatur, während sein Durchmesser schrumpft. Noch bietet das entartete Elektronengas der einwirkenden Gravitation neutralisierenden Gegendruck, aber nach Überschreiten der Chandrasekhar-Grenze von 1.4 Sonnenmassen funktioniert das nicht mehr. Die Temperatur im Kern steigt auf 400 Millionen K an

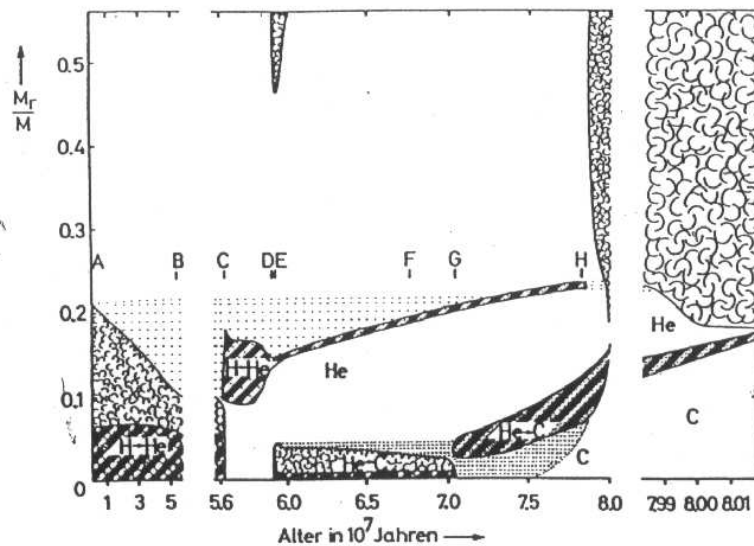


Abbildung 8.5: Entwicklung des inneren Aufbaus eines Sterns mit $5 M_{\odot}$. In den schraffierten Gebieten findet nukleare Energieerzeugung statt. Die wolkenigen Gebiete bezeichnen Konvektionszonen.

und der Kohlenstoff zündet. Die bei dieser thermonuklearen Reaktion freigesetzte Energie heizt nun das (entartete) Gas des Sterns auf, aber dieses dehnt sich nicht aus, wie es ja ein normales Gas tun würde, sondern bleibt von der ansteigenden Temperatur unbeeindruckt. Dadurch finden die Fusionen in noch schnellerer Folge statt, denn diese werden durch hohe Temperaturen begünstigt. Innerhalb von Sekundenbruchteilen steigt die Temperatur sprunghaft auf einige Milliarden K und alles vorhandene Brennmaterial wird in Nickel umgewandelt. Nun wandert die Fusionswelle immer weiter nach außen (ihr läuft eine Druck-, oder besser Stoßfront voraus), wobei sofort neue Kernverschmelzungen zünden. Je weiter sie jedoch nach außen gelangt (und das mit einer Geschwindigkeit von vielleicht 1000 km/s), um so 'verdünnter' werden die einzelnen Schichten und auch der Grad der Entartung nimmt ab. Die Verbrennung wird immer weniger vollständig, und die äußeren Schichten werden durch die Stoßfront völlig unverändert in den Raum geblasen. Da der Stern nur einen Radius von 3000 km besaß, ist der gesamte Vorgang nach drei Sekunden abgeschlossen, die größte bekannte Kernexplosion ist erfolgt.

• Supernova Typ II

Die Helligkeitskurve einer SN II ist wesentlich unregelmäßiger als beim Typ SN I. Nach dem Maximum folgt ein steiler Abfall über ca. 25 Tage. Sodann bleibt die Helligkeit 50 bis 100 Tage etwa konstant, worauf sie wieder steil abfällt. Eine Supernova vom Typ II ist das Ende eines massereichen Sterns. Zum Ende seiner (thermonuklearen) Brennphase weist er in seinem Innern einen kompakten Eisenkern auf, der nicht weiter fusionieren kann. In den ihn umgebenden Schalen laufen jedoch noch verschiedene Kernprozesse ab (u.a. das Siliziumbrennen in der den Kern überlagernden Schale), bei denen auch weiter Eisen erzeugt wird, was letztendlich die Masse und die Temperatur des (entarteten) Kerns

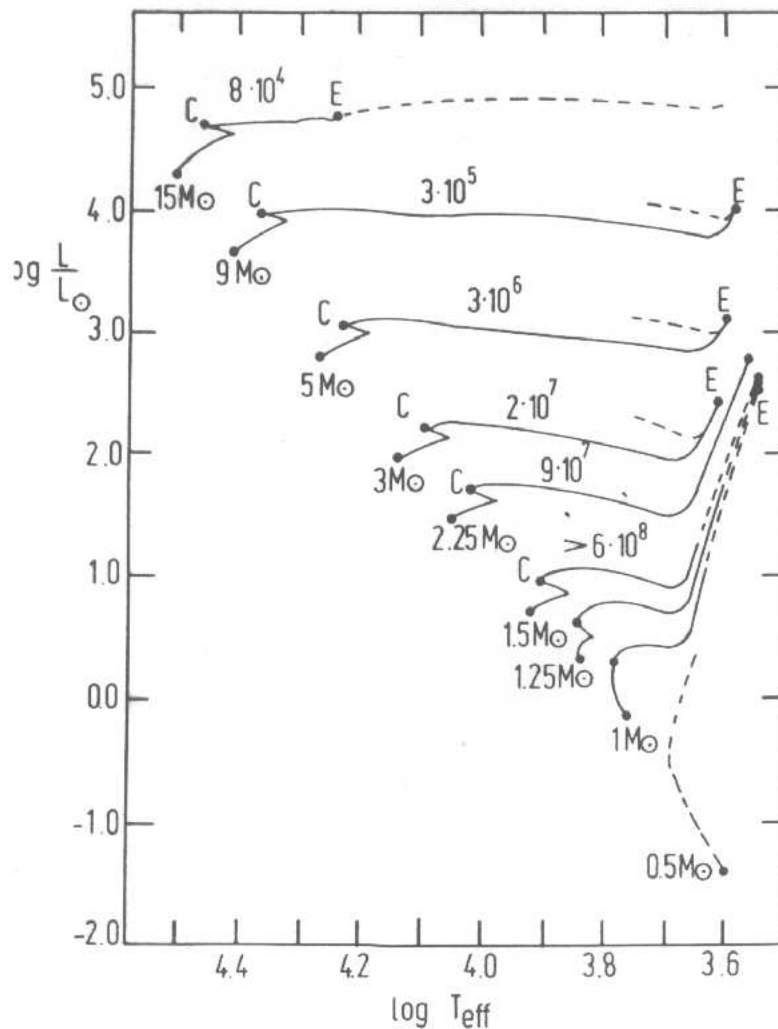


Abbildung 8.6: Berechnete Entwicklungswege von massereichen Sternen. Die Zahlen über den Kurven geben die Entwicklungszeit von *C* nach *E* (Zündung des He-Brennens im Kern).

weiter erhöht. Ab einem bestimmten Punkt, bei dem die Temperatur etwa 5 bis 10 Milliarden K beträgt, wird der Kern instabil. Er ist plötzlich so stark komprimierbar, dass er im Freien Fall in sich zusammenstürzt. Bei der genannten Temperatur sind die im Kern vorhandenen Gamma-Quanten derart reaktiv, dass sie die Eisenkerne in Alphateilchen (Heliumkerne, 2 Protonen und 2 Neutronen) aufspalten (man nennt dies Photodissoziation - Aufspaltung von Teilchen durch Photonen). Die Dichte im Kern beträgt jetzt 10 Milliarden Gramm pro Kubikzentimeter.

Die Elektronen werden so nahe an die Protonen und Alpha-Teilchen gebracht, dass sie sich mit ihnen zu Neutronen vereinen. Bei dieser Reaktion werden Neutrinos freigesetzt,



Abbildung 8.7: Der Eskimo–Nebel zeigt mehrere Schalen, die vom Zentralstern abgeworfen worden sind. In der äußersten Schale haben sich bereits Rayleigh–Taylor Instabilitäten gebildet (Fingerartige Gebilde). Quelle: HST Bildarchiv.

welche den Kern mit Lichtgeschwindigkeit verlassen. Doch je weiter der Kern kollabiert, um so schwieriger wird es auch für die Neutrinos, diesem zu entweichen, am Ende ist es ihnen nicht mehr möglich. Der gesamte Vorgang währt nur Millisekunden, und nach einer Viertelsekunde ist der Kern soweit kollabiert, dass er praktisch nur noch aus Neutronen in dichtester Packung besteht und seine Dichte derjenigen von Kernteilchen entspricht. Jetzt aber kommt der Kollaps schlagartig zum Stillstand, da die Neutronen in der dichtesten Packung vorliegen und nicht weiter komprimierbar sind. Erst jetzt 'merkt' die Hülle, dass ihr quasi der Boden unter den Füßen weggezogen wurde, und der Rest des Sterns fällt auf die Kernregion hinunter. Jedoch wird durch den plötzlichen Stop des Zusammenbruchs eine Schockwelle erzeugt, welche nun in Gegenrichtung die Hülle durchläuft (mit anfangs 30 000 km/s). Diese Schockwelle erreicht nach mehreren Stunden die äußeren Bereiche des Sterns und führt zum Abstoßen der Hülle. Das sehen wir dann als Supernova. Übrig bleibt allein der Neutronenstern. Eigentlich sind die Vorgänge im Sterninnern noch komplizierter als hier beschrieben, denn in den einzelnen Schalen des Sterns werden durch den Zusammenbruch (Dichte- und Temperaturerhöhung) weitere, blitzartige Kernfusionen gezündet, wobei Elemente vom Helium bis zum Nickel entstehen. Diese Kernbrennasche reichert dann das interstellare Medium mit frischem Material an.

- **Hypernova**

Extrem massereiche Sterne befinden sich von ihrer Geburt an in einem sehr instabilen Zustand. Die nach innen gerichtete Gravitationskraft der 80 bis 120-fachen Sonnenmasse sorgt im Zentrum des Sterns für wahrhaft exotische Verhältnisse. Druck und Temperatur sind derart hoch, dass der vorhandene, riesige Vorrat an Kernbrennstoff (überwiegend

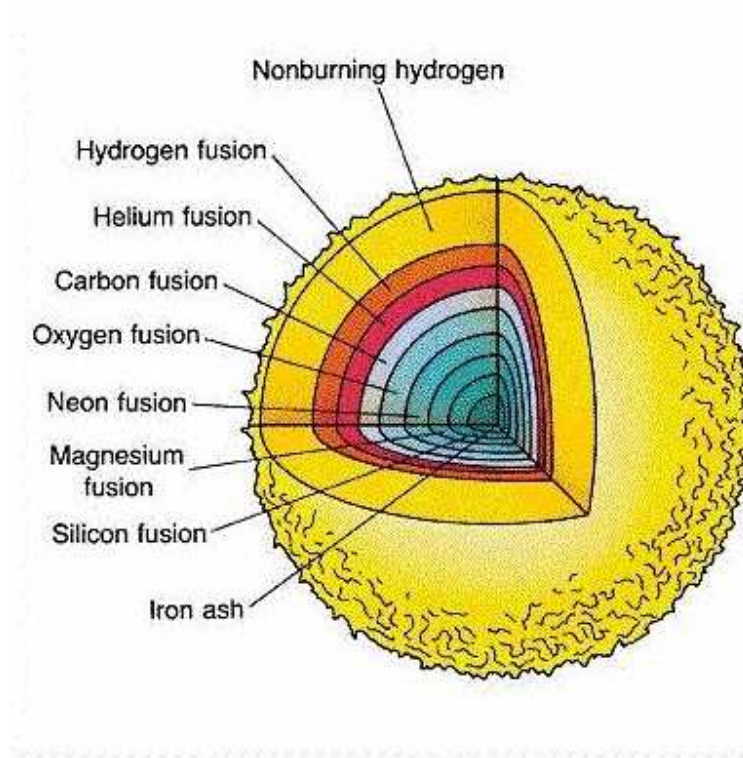


Abbildung 8.8: Die berühmte Zwiebelschalenstruktur eines massereichen Sterns am Ende der Entwicklungszeit. Im Zentrum bleibt ein Fe-Kern zurück.

Wasserstoff) sehr schnell verbraucht wird. Die Kernreaktionen laufen viel schneller und häufiger ab als in 'normalen' Sternen von etwa Sonnengröße. Dementsprechend hoch ist die Strahlungsemission dieser Übergiganten, sie kann diejenige der Sonne leicht um das millionenfache übertreffen. Jede kleine Störung des empfindlichen Gleichgewichts innerhalb des Sterns löst Schwingungen aus, die mit immer größer werdender Amplitude den Sternkörper durchlaufen. Treffen sie auf die Oberfläche, werden große Materiemengen abgestoßen. Auch durch einen extrem hohen Sternwind entledigt sich der Riese überflüssiger Masse.

Das Lebensende eines massereichen Sterns kann nicht ruhig verlaufen, seinen 'Abschied' wird er unweigerlich als Supernova nehmen. Heute glaubt man, einer neuen Theorie zufolge, dass Sterne mit rund hundertfacher Sonnenmasse in einer Explosion vergehen könnten, die noch um den Faktor 100 mal stärker ist als eine herkömmliche Supernova. Hierzu hat man deshalb den Begriff der **Hypernova** geprägt. Unterstützt wird diese Theorie unter anderem durch die Gammabursts, kurze Gammastrahlenblitze, die aus allen Himmelsrichtungen aus den Tiefen des Alls zu uns gelangen. Zum erstenmal im November 2000 haben Wissenschaftler bei einem Gammablitz aus derselben Quelle Emissionslinien des Eisens nachweisen können. Die Quelle des Gammabursts GRB 991216 liegt etwa 8 Milliarden Lichtjahre von der Erde entfernt. Es war einer der heftigsten Gammaausbrüche, die bisher beobachtet wurden. Für ihre Entstehung gibt es viele Theorien, dass

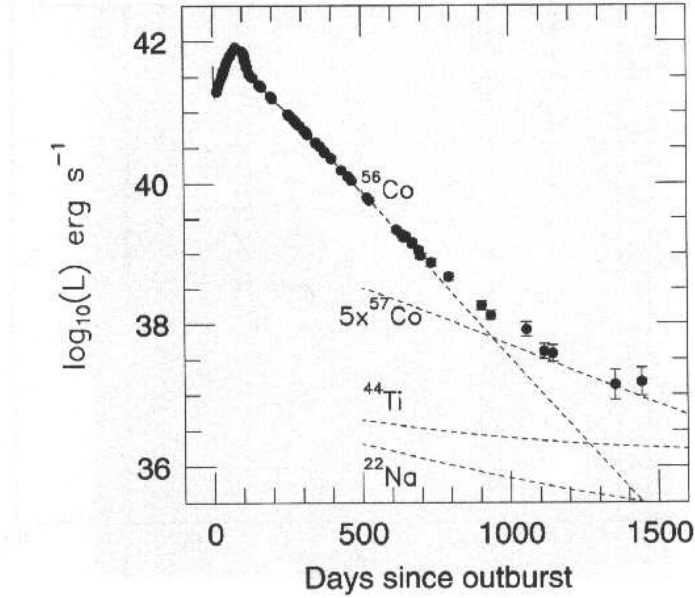


Abbildung 8.9: Die Lichtkurve der SN 1987A in den ersten 1444 Tagen. Die gestrichelten Kurven geben die Beiträge von den entsprechenden radioaktiven Zerfallskanälen an: $^{56}_{27}\text{Co} \rightarrow ^{56}_{26}\text{Fe} + e^+ + \nu_e + \gamma$ mit einer Halbwertszeit von 77,7 Tagen. Der erste steile Abfall resultiert vom Zerfall $^{56}_{28}\text{Ni} \rightarrow ^{56}_{27}\text{Co} + e^+ + \nu_e + \gamma$ mit einer Halbwertszeit von 6 Tagen. (Suntzeff et al. 1992, ApJ 384, L33).

beispielsweise zwei sehr massive Körper wie Neutronensterne kollidieren. Doch anhand der Eisenlinien ist man sich relativ sicher, dass hier eine Hypernova explodiert ist, und sehr wahrscheinlich sind wir Zeuge der Entstehung eines Schwarzen Lochs geworden.

8.4 Kompakte Objekte als Asche der Sternentwicklung

8.4.1 Weiße Zwerge

Weiße Zwerge sind Sterne mit einer Masse von etwa einer $M_{\odot}$ und typischen Radien von $\simeq 5000$ km (planetenartig !). Dies bedeutet, dass sie im Innern eine beträchtliche Dichte aufweisen, die mittlere Dichte folgt zu $\simeq 10^6$ g cm $^{-3}$. Sie enthalten kein nukleares Brennen mehr und kühlen nur noch aus, indem sie ihr Wärmereservoir abstrahlen. Wir wissen heute, dass WZ die Gravitationskraft durch den Entartungsdruck der Elektronen ausbalancieren. Geschichtlich betrachtet, war diese Erkenntnis nicht immer klar.

Der bekannteste WZ ist sicher der Begleitstern von Sirius, Sirius B. Aus dem 3. Keplerschen Gesetz hat man schon früh seine Masse zu $0.75 - 0.95 M_{\odot}$ abgeschätzt. Die Leuchtkraft $L_* \simeq (1/360) L_{\odot}$ folgt aus der Distanz und der Helligkeit. Zusammen mit der Effektivtemperatur $T_* \simeq 8000$ K (Adams 1914) und

$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_*^4 \quad (2.124)$$

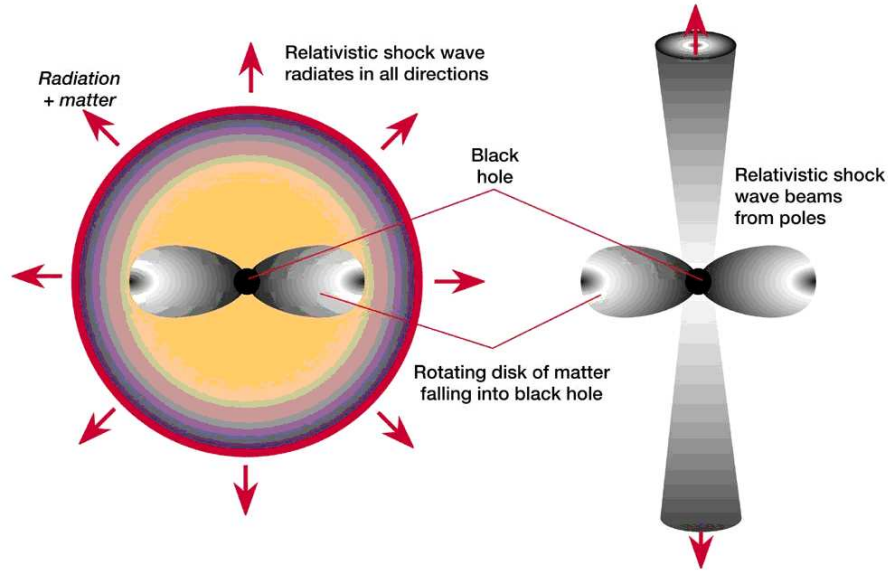


Abbildung 8.10: Eine Hypernova Explosion erzeugt entweder eine sphärische Stoßwelle oder eine Art Jets, die sich beide mit relativistischer Geschwindigkeit im interstellaren Medium ausbreiten. Im Zentrum bleibt ein massereiches Schwarzes Loch zurück.

hat man damals einen Radius von 18800 km abgeschätzt. Der heutige Wert ist allerdings etwa viermal kleiner. Dies veranlaßte Eddington 1926 zur Bemerkung, dass Sirius B eine Masse wie die Sonne aufweist, aber eher wie Uranus aussieht. Damals waren insgesamt nur 3 Objekte von diesem Typ bekannt. Die mittlere Dichte war damit 2000 mal höher als die von Platin. Deshalb konnte der innere Zustand eines solchen Sterns nicht erklärt werden.

Dies änderte sich 1926 schlagartig mit der Entdeckung der Fermi–Dirac Statistik für die Elektronen. Es war dann Fowler, der kurz darauf das Rätsel der WZ löste (1926): es ist der Entartungsdruck der Elektronen, der die WZ im hydrostatischen Gleichgewicht hält. Echte Modelle wurden von Chandrasekhar 1930 und 1931 zum ersten Male berechnet. Er fand dann heraus, dass dieses hydrostatische Gleichgewicht nur bis zu einer gewissen Massengrenze, $M \simeq 1.4 M_{\odot}$ gilt, die heute als **Chandrasekhar Grenzmasse** bekannt ist. Wenn Elektronen einen Entartungsdruck aufbauen, so können dies natürlich auch Baryonen, insbesondere Neutronen. Landau hat 1932 zum ersten Male darüber spekuliert, dass es noch kompaktere Sterne geben könnte, die durch den Entartungsdruck der Neutronen ins Gleichgewicht kommen. Gefunden wurden diese **Neutronensterne** jedoch erst 1967. Die Interpretation der WZ und Vorhersage der Existenz von Neutronensternen ist ein schönes Beispiel für die Wechselwirkung zwischen Astronomie und Physik.

Die Struktur eines Weißen Zwerges ist allein durch das hydrostatische Gleichgewicht bestimmt

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho_0(r)r^2 \quad (8.1)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho_0(r)}{r^2}. \quad (8.2)$$

Nach Kapitel 5.3 ist die Zustandsgleichung bei Entartung allein durch den Fermi-Impuls x der Elektronen gegeben

$$P = \frac{m_e c^2}{\Lambda_e^3} \Phi(x), \quad (8.3)$$

wobei gilt

$$\Phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left[x\sqrt{1+x^2}(2x^2/3 - 1) + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]. \quad (8.4)$$

$\Lambda_e \equiv h/(2\pi m_e c)$ bedeutet die Compton-Wellenlänge des Elektrons und der dimensionslose Fermi-Impuls x

$$x = p_{F,e}/m_e c = 1.0088 \times 10^{-2} \left(\frac{\rho_0}{\mu_e} \right)^{1/3}. \quad (8.5)$$

hängt mit der Dichte zusammen. Für $x > 1$ sind die Elektronen relativistisch entartet. μ_e ist das **mittlere Molekulargewicht der Elektronen**

$$\mu_e = \frac{m_B}{m_u Y_e} \simeq 2, \quad Y_e = Z/A. \quad (8.6)$$

Mit dieser Form der Zustandsgleichung können die Strukturgleichungen z.B. mit einem Runge-Kutta Verfahren leicht integriert werden. Die Anfangswerte sind dabei $M(0) = 0$ und $\rho(0) = \rho_c$. An der Oberfläche verschwindet der Druck, $P(R) = 0$. Damit bekommen wir eine Sequenz von Lösungen, die nur von der Zentraldichte abhängen, d.h. $M = M(\rho_c)$ (Abb. 8.11), und damit auch eine Sequenz $M = M(R)$ (Abb. 8.12). Da die Elektronen mit dem Ionenhintergrund leicht wechselwirken, entstehen bei hohen Dichten leichte Korrekturen zu dieser Zustandsgleichung (Hamada-Salpeter Modelle). Bei geringen Massen und hohen Temperaturen spielt auch die Wasserstoffhülle eine Rolle bei der Bestimmung des Radius von Weißen Zwergen. Eine hohe Oberflächentemperatur bläht den Weißen Zwerg auf.

Polytropen-Näherung

Bei geringen Dichten und im relativistischen Grenzfall geht die Zustandsgleichung in die Form einer Polytropn über. Gleichgewichtskonfigurationen mit einer Zustandsgleichung der Form $P = P(\rho) = K\rho^\Gamma$ sind in der Literatur als **Polytropen** bekannt. Aus dem hydrostatischen Gleichgewicht finden wir durch Differentiation

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho. \quad (8.7)$$

Für $\Gamma = 1 + 1/n$ können wir nun dimensionslose Variablen einführen

$$\rho = \rho_c \theta^n, \quad r = a \xi. \quad (8.8)$$

mit $\rho_c = \rho(0)$ als der Zentraldichte und a

$$a = \sqrt{\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n-1}}{4\pi G}}. \quad (8.9)$$

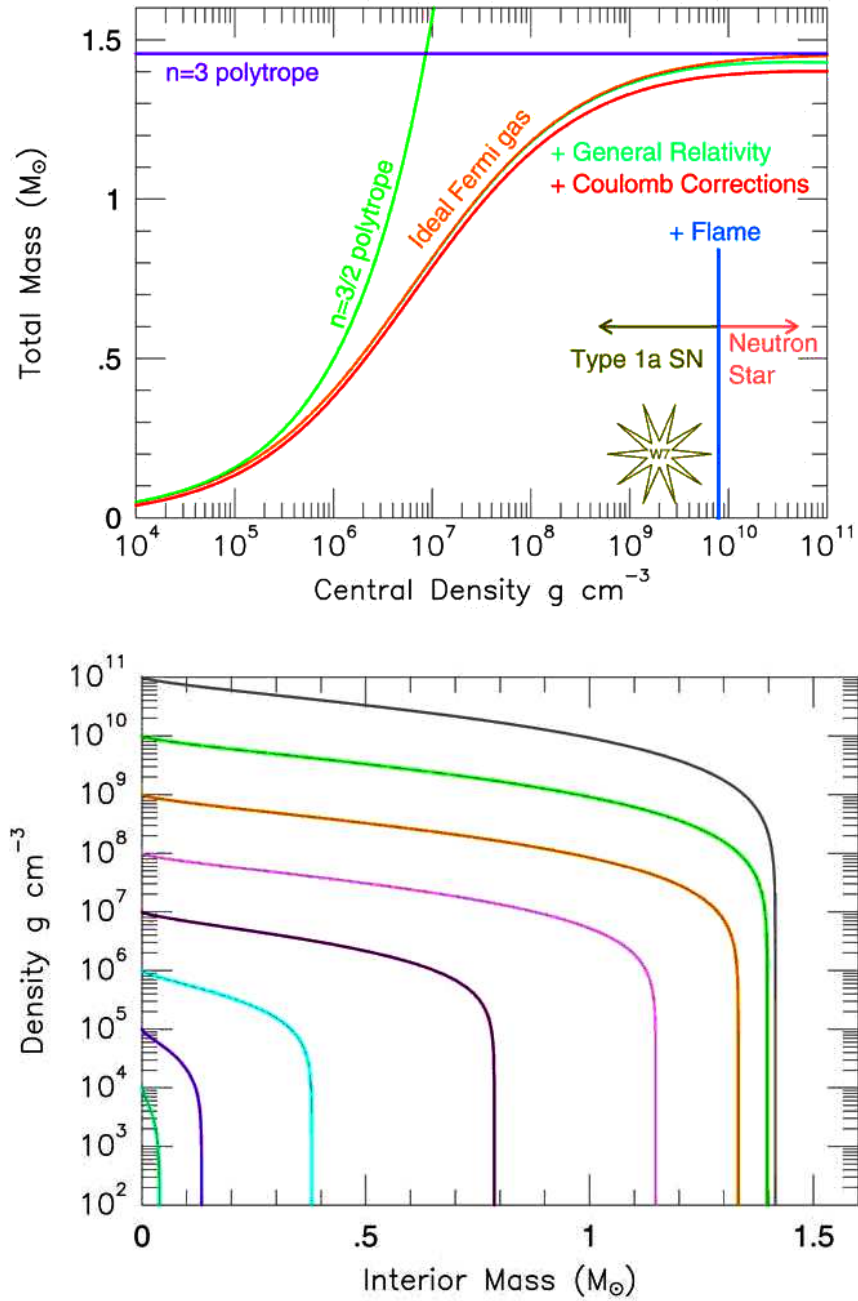


Abbildung 8.11: Oben: Masse als Funktion der Zentraldichte für Weiße Zwerge im Falle des idealen Fermi-Gases. Die Polytropen-Näherung gilt nur bei geringen Dichten und im relativistischen Grenzfall. Unten: Dichteprofile als Funktion der Masse. Bei einer Masse von etwa 0.5 Sonnenmassen werden die Elektronen relativistisch.

Damit gewinnt das hydrostatische Gleichgewicht folgende Form (sog. Lané–Emden Gleichung)

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (8.10)$$

Diese Gleichung kann einfach auf dem Computer gelöst werden mit den Anfangsbedingungen

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0. \quad (8.11)$$

Der Radius des Sterns befindet sich bei $\theta(\xi_*) = 0$. Dafür findet man, wenn $\Gamma = 5/3$, $n = 3/2$

$$\xi_* = 3.6537, \quad \xi_*^2 |\theta'(\xi_*)| = 2.71406 \quad (8.12)$$

und für $\Gamma = 4/3$, $n = 3$

$$\xi_* = 6.89685, \quad \xi_*^2 |\theta'(\xi_*)| = 2.01824. \quad (8.13)$$

Aus ξ_* kann man den Sternradius R als Funktion der Zentraldichte berechnen

$$R = a\xi_* = \sqrt{\frac{(n+1)K}{4\pi G}} \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \xi_* \quad (8.14)$$

und aus der zweiten Größe die Masse M als Funktion der Zentraldichte

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_*} \xi^2 \theta^n d\xi \\ &= -4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_*} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi \\ &= 4\pi a^3 \rho_c \xi_*^2 |\theta'(\xi_*)| \\ &= 4\pi \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{3/2} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \xi_*^2 |\theta'(\xi_*)|. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Die Zentraldichte kann nun aus beiden Beziehungen eliminiert werden. Damit erhalten wir folgende Massen–Radius–Beziehung für entartete Sterne

$$M(R) = 4\pi R^{\frac{3-n}{1-n}} \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{\frac{n}{n-1}} \xi_*^2 |\theta'(\xi_*)| \xi_*^{\frac{3-n}{1-n}}. \quad (8.16)$$

Durch Einsetzen der Konstanten für entartete Elektronen ergibt dies folgende expliziten Werte. Wenn $\Gamma = 5/3$

$$R = 1.12 \times 10^4 \text{ km} \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ g cm}^{-3}} \right)^{-1/6} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/6} \quad (8.17)$$

$$M = 0.496 M_\odot \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ g cm}^{-3}} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/2} \quad (8.18)$$

$$M = 0.70 M_\odot \left(\frac{R}{10^4 \text{ km}} \right)^{-3} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5}, \quad (8.19)$$

und für $\Gamma = 4/3$

$$R = 3.347 \times 10^4 \text{ km} \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ g cm}^{-3}} \right)^{-1/3} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-2/3} \quad (8.20)$$

$$M = M_{\text{Ch}} = 1.457 M_{\odot} \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2. \quad (8.21)$$

Für relativistische Elektronen ist die Masse unabhängig von der Zentraldichte und damit auch unabhängig vom Radius. Dies ist die bekannte Chandrasekhar Massengrenze für WZ, die nur noch von der chemischen Zusammensetzung abhängt. In Abb. 8.12 ist die Massen–Radius Beziehung für Weiße Zwerge mit verschiedener chemischer Zusammensetzung gezeigt³.

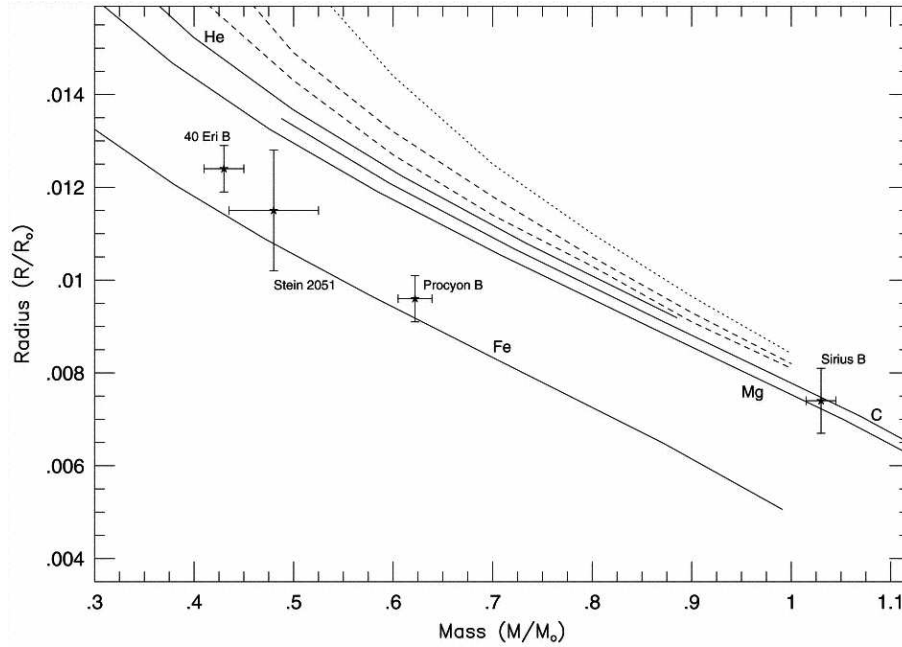


Abbildung 8.12: Massen–Radius Beziehung für Weiße Zwerge, bestehend aus He, C, Mg oder Fe mit Radien in Einheiten von Sonnenradien. Die durchgezogenen Linien entsprechen realistischeren Modellen für die Materie in Weißen Zwergen, die gestrichelten Linien enthalten zusätzlich eine Atmosphäre.

Die Gravitationsrotverschiebung ist an der Oberfläche von Weißen Zwergen schon beträchtlich

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq \frac{GM}{c^2 R} \simeq 10^{-4} \quad (8.22)$$

Solche Rotverschiebungen sind in der Tat gemessen worden für Sirius B (91 km s^{-1}) und 40 Eri B (22 km s^{-1}).

³Shipman et al. 1998, ApJ

Die Chandrasekhar–Masse

Die Existenz einer Massengrenze für entartete Sterne ist ein fundamentales Konzept der Astrophysik. Landau hat 1932 ein qualitatives Argument dafür geliefert. Wir betrachten einen Stern mit Radius R , der N Fermionen enthalte. Die mittlere Dichte beträgt deshalb $n \simeq N/R^3$ und das Volumen pro Fermion $\simeq 1/n$. Nach der Unschärferelation beträgt der Impuls eines Fermions deshalb $p_F \simeq \hbar n^{1/3}$. Für relativistische Fermionen erhalten wir damit eine Fermi-Energie

$$E_F \simeq p_F c = \hbar n^{1/3} c \simeq \frac{\hbar c N^{1/3}}{R}. \quad (8.23)$$

Andererseits beträgt die potentielle Energie

$$E_G \simeq -\frac{GMm_B}{R}. \quad (8.24)$$

Dies ergibt eine totale Energie von

$$E = E_F + E_G = \frac{\hbar c N^{1/3}}{R} - \frac{GNm_B^2}{R} \propto \frac{1}{R}. \quad (8.25)$$

Beide Terme gehen mit $1/R$! Bei geringer Teilchenzahl N wird die Energie kleiner ($E > 0$), falls der Radius anwächst. Damit nimmt E_F ab, und die Elektronen werden nichtrelativistisch mit $E_F \propto p_F^2 \propto 1/R^2$. Damit kann die Gravitationsenergie gewinnen und zu einem stabilen Zustand führen.

Wenn $E < 0$, d.h. N groß, so bleibt E immer negativ bei abnehmenden Radius. Es gibt keinen Gleichgewichtszustand. Die maximale Anzahl von Baryonen, die noch zu einem Gleichgewicht führen, ist deshalb gerade erreicht, wenn $E = 0$, und damit

$$N_{\max} \simeq \left(\frac{\hbar c}{Gm_B^2} \right)^{3/2} \simeq 2 \times 10^{57}. \quad (8.26)$$

Dies führt zu einer maximalen Masse von

$$M_{\max} = N_{\max} m_B \simeq 1.5 M_{\odot}. \quad (8.27)$$

Diese Masse hängt nur von Naturkonstanten ab!

Der Radius für $M = M_{\max}$ wird erreicht, wenn die Elektronen gerade relativistisch werden, $E \geq m_e c^2$, d.h. aus (8.23) folgt

$$R \leq \frac{\hbar}{mc} \sqrt{\frac{\hbar c}{Gm_B^2}}. \quad (8.28)$$

Damit ist $R \simeq 5000$ km, falls $m = m_e$, und $R \simeq 3$ km, falls $m = m_n$. Für beide Fälle gilt jedoch $M \simeq 1.5 M_{\odot}$.

8.4.2 Neutronensterne

Kurz nach der Entdeckung des Neutrons durch Chadwick haben Landau, Baade und Zwicky 1932 die Möglichkeit diskutiert, dass es auch Sterne geben könnte, die aus Neutronen bestehen, in Analogie zu den Weißen Zwergen, die ihren Druck durch den Entartungsdruck der

Elektronen aufbauen. Normalerweise sind Neutronen instabil und zerfallen in 10.8 Minuten in ein Proton und ein Elektron unter Aussendung eines Antineutrinos. Deshalb kann Neutronenmaterie nur im Gleichgewicht mit Protonen und Elektronen existieren. Dabei muß die Elektronendichte so hoch ausfallen, dass die Fermienergie des entarteten Elektronengases von derselben Ordnung wie die Zerfallsenergie der Neutronen ist (d.h. etwa 780 keV). Dies ist nur möglich bei Dichten über 10^8 g cm^{-3} , also oberhalb der Dichte in Weißen Zwergen.

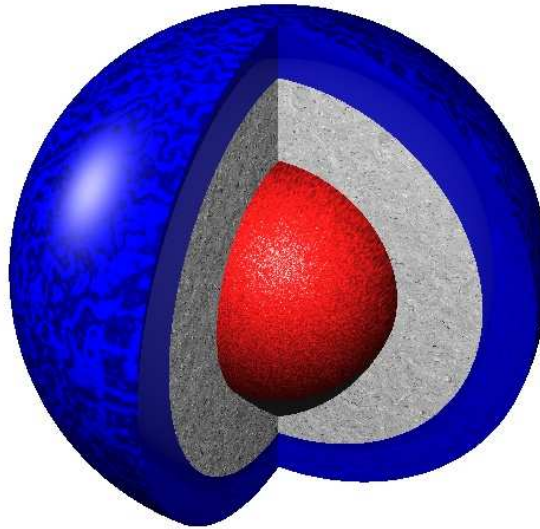


Abbildung 8.13: Struktur eines Neutronensterns. Ein Neutronenstern besteht aus mehreren Schichten: die Außenhaut besteht aus einer äußeren (Fe-Kerne) und inneren Kruste von schweren Kernen und einem entarteten Elektronengas (Metall), an die sich die Neutronenflüssigkeit anschließt. Der zentrale Kern besteht wahrscheinlich aus (color-superconducting) Quarkmaterie. Der ganze Stern rotiert i.a. mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω .

Aus den bekannten Eigenschaften der beteiligten Teilchen ergibt sich für einen typischen Neutronenstern von 20 km Durchmesser folgende Schalenstruktur:

- Wie alle Sterne besitzt auch der Neutronenstern eine **Atmosphäre**, wahrscheinlich bestehend aus interstellarem Wasserstoff. Infolge der gewaltigen Gravitation beträgt die Skalenhöhe jedoch nur einige cm.
- **Äußere Kruste:** Da freie Neutronen in dieser Umgebung instabil sind, gibt es dort nur Eisenatomkerne und Elektronen. Diese Atomkerne bilden ein Kristallgitter. Die Zone aus kristallinen Eisenatomkernen setzt sich bis in eine Tiefe von etwa 100 Metern fort. Dabei steigt die mittlere Dichte etwa auf ein Tausendstel der Dichte gewöhnlicher Atomkerne an. Ferner nimmt der Neutronenanteil der Atomkerne zu. Es bilden sich neutronenreiche Eisenisotope, die nur unter den dortigen extremen Drücken stabil sind.
- **Innere Kruste:** Ab einer Tiefe von 100 Metern ist der Druck so hoch, dass auch freie Neutronen Bestand haben. Dort beginnt die sogenannte innere Kruste, eine Übergangsschicht, die eine Dicke von 1 bis 2 km hat. In ihr existieren Bereiche aus schweren

Atomkernen neben solchen aus Neutronenflüssigkeit, wobei mit zunehmender Tiefe der Eisenanteil von 100% auf 0% abnimmt, während der Anteil der Neutronen entsprechend ansteigt. Ferner steigt die mittlere Dichte auf die von Atomkernen und darüber hinaus an (Kerndichte = $2.4 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$).

- **Kern:** Im Anschluss an die innere Kruste besteht der Stern überwiegend aus Neutronen, die mit einem geringen Anteil von Protonen und Elektronen im dynamischen Gleichgewicht stehen. Sofern die Temperaturen hinreichend niedrig sind, verhalten sich die Neutronen dort supraflüssig und die Protonen supraleitend. Für einen typischen Neutronenstern liegt die zugehörige kritische Temperatur bei ca. 10^{11} Kelvin, Neutronensterne werden also bereits sehr kurz nach ihrer Entstehung supraflüssig.
- **Zentraler Kern:** In Neutronensternen mit einer Masse über einer Sonnenmasse erreicht die Zentraldichte Werte jenseits von dreifacher Kerndichte. Die Form der Materie bei diesen hohen Dichten wird heute in Schwerionenbeschleunigern erprobt (GSI z.B.). Möglicherweise beginnt dort eine Kernzone aus Pionen oder Kaonen. Da diese Teilchen Bosonen sind und nicht dem Pauli-Prinzip unterliegen, könnten sie alle den gleichen energetischen Grundzustand einnehmen und damit ein sogenanntes **Bose-Einstein-Kondensat** bilden.

Eine weitere Möglichkeit wäre das Vorliegen freier Quarks. Da neben Up- und Down-Quarks auch Strange-Quarks vorkämen, bezeichnet man ein solches Objekt als **Quark-Stern**. Da Neutronensterne mit Quark-Core eine höhere Dichte aufweisen und damit kleiner sind, sollten sie rascher rotieren können als reine Neutronensterne. Ein Pulsar mit einer Rotationsperiode unter 0,5 ms wäre bereits ein Hinweis auf die Existenz dieser Materieform.

Struktur der Neutronensterne

Wie der Druck des entarteten Elektronengases in Weißen Zwergen, so hält der Druck des entarteten Neutronen- und Quarkgases in Neutronensternen der Gravitation das Gleichgewicht. Im Unterschied zu Weißen Zwergen werden jedoch die Radien so gering, dass allgemein relativistische Effekte der Gravitation eine Rolle spielen. Oppenheimer und Volkoff haben 1939 zum ersten Male die Grundgleichungen aufgestellt. Das Linienelement eines sphärisch symmetrischen Sterns hat folgende Form

$$ds^2 = \exp(2\Phi(r)) c^2 dt^2 - \exp(2\Lambda(r)) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (8.29)$$

Dabei ist r die radiale Koordinate und der letzte Ausdruck entspricht dem Linienelement einer Kugelschale mit Radius r . $\Phi(r)$ ist sozusagen die relativistische Verallgemeinerung des Newtonschen Potentials. Die Funktion $\Lambda(r)$ beschreibt die Krümmung des 3-Raumes. Die stellare Materie wird durch eine totale Energiedichte ϵ und den Druck P beschrieben. Das hydrostatische Gleichgewicht wird nun durch die sog. **Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV)** Gleichung bestimmt

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\epsilon(P)}{r^2 c^2} \left(1 + \frac{P}{\epsilon}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{M(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{rc^2}\right)^{-1} \quad (8.30)$$

$$\frac{dM(r)c^2}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(P). \quad (8.31)$$

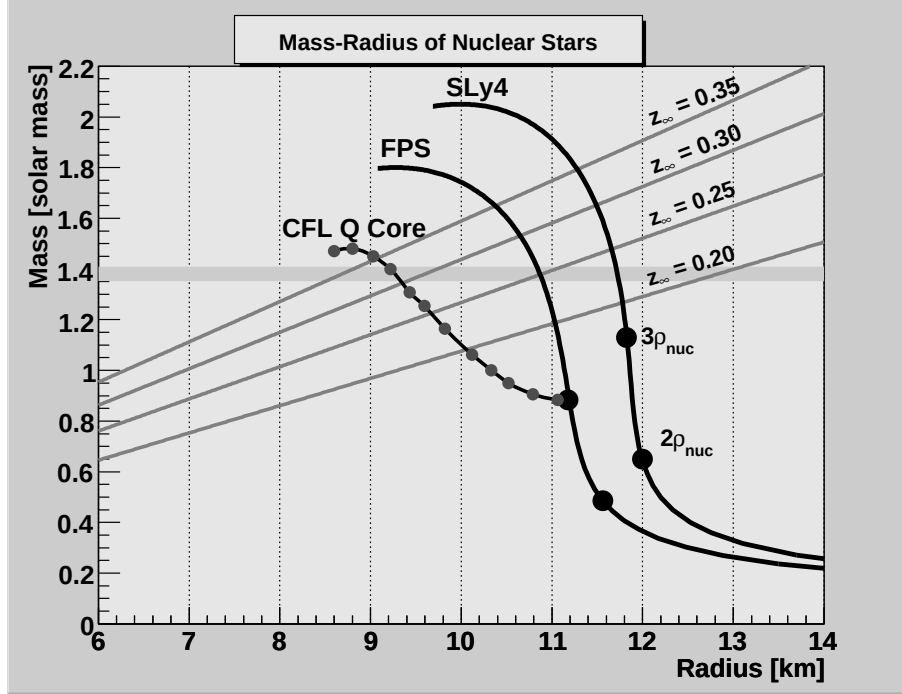


Abbildung 8.14: Massen–Radius Beziehung für Neutronensternmodelle im Rahmen normaler Neutronenmaterie (weiche Zustandsgleichung FPS und steife Zustandsgleichung SLy4) im Vergleich zu einer Quark–Core Struktur. Stabile Neutronensterne existieren nur im Bereich fallender Funktion $M(R)$. Zu fester Masse gibt es noch Unsicherheiten im Radius, bedingt durch die noch nicht genau bekannten Starke Wechselwirkungskräfte, wie etwa der sog. Bag–Konstante B im Quark–Confinement. Rein hadronische Materie (SLy4) wirkt stark abstoßend, so dass dadurch die größten Radien entstehen. Die Existenz einer zentralen color–superconducting Quarkphase (CFL Q Core, gepunktete Kurve) macht den Druck weicher, so dass geringere Radien entstehen. Es sind aber kaum Radien unter 9 km zu erwarten. Rotverschobene atmosphärische Linien mit $z = 0.35$ ergeben starke Constraints an die Modelle (Cottam et al., Nature 420 (2002) 51).

Gravitationskräfte und Druckkräfte sind dabei im Gleichgewicht

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{\epsilon + P} \frac{dP}{dr}. \quad (8.32)$$

Die zweite Funktion $\Lambda(r)$ hängt mit der Massenverteilung zusammen

$$\exp(-2\Lambda(r)) = 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \rightarrow 1, \quad r \rightarrow 0. \quad (8.33)$$

Ausserhalb des Neutronensterns gilt die **Schwarzschild–Metrik**, $r \geq R_*$,

$$\exp(2\Phi(r)) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}, \quad \exp(-2\Lambda(r)) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}, \quad (8.34)$$

die asymptotisch in die flache Minkowski–Metrik übergeht. $\epsilon(P)$ beschreibt dabei eine Zustandsgleichung für Neutronen– und Quarkmaterie (z.B. FPS oder SLy4). Diese Zustands–

gleichungen sind bis zur Kerndichte relativ gut bekannt, jenseits zweifacher Kerndichte unterscheiden sie sich jedoch beträchtlich. Die totale Energiedichte ϵ und der Druck werden in Einheiten von MeV fm^{-3} ausgedrückt. Im Vergleich zum Newtonschen hydrostatischen Gleichgewicht treten drei Korrekturterme auf: zwei Druckkorrektur-Terme und ein relativistischer Faktor, der von der Schwarzschild-Geometrie herrührt. Zu gegebenem Zentraldruck $P(r=0)$ können diese Gleichungen einfach von innen nach außen integriert werden, bis $P=0$ erreicht ist. Dies bestimmt dann die Masse M und den Radius des Objektes. Durch Variation des Zentraldruckes erhält man so die Radius–Massen Beziehung (Abb. 8.14).

Wie bei Weißen Zwergen gibt es auch hier eine **obere Massengrenze** $\simeq (1.6 - 2.0) M_{\odot}$, jenseits von der Neutronensterne nicht mehr stabil sind und auf ein Schwarzes Loch kollabieren (Abb. 8.14). Die genaue Grenze ist nicht bekannt, da die Starke Wechselwirkung der Kernkräfte noch nicht genau bekannt sind. Die Zentralkichten in Neutronensternen übersteigen um ein Vielfaches die Kerndichte $\rho_0 = 2.4 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$.

Erste Messungen der gravitativen Rotverschiebung z einer atmosphärischen Linie mit XMM–Newton⁴

$$z = \frac{\lambda_{\infty} - \lambda_{*}}{\lambda_{*}} = \frac{\nu_{*}}{\nu_{\infty}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}(R_{*})}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2GM/R_{*}c^2}} - 1 \quad (8.35)$$

deuten auf einen Wert von $z = 0.35$ hin. $g_{00}(r) = 1 - 2GM/r^2$ ist dabei die zeitliche Komponente der Schwarzschild–Metrik. Dies entspricht einem Masse–Radius Verhältnis von

$$\frac{GM}{R_{*}c^2} = 0.5 - \frac{0.5}{(1+z)^2} = 0.226. \quad (8.36)$$

Dies würde auf einen sehr kompakten Neutronstern deuten mit einem Radius R_{*} von nur zwei Schwarzschild–Radien (Abb. 8.14). Als mögliche Lösungen kommen entweder ein normaler Neutronenstern mit einer Masse von 1.7 Sonnenmassen und einem Radius von 11.2 km oder ein *Color–superconducting* Quarkstern mit einer Masse von 1.35 Sonnenmassen und einem Radius von 9 km in Frage. Diese Werte können sich allerdings durch eine genauere Berechnung der Zustandsgleichung von Quarkmaterie noch etwas ändern.

Radiopulsare

Neutronensterne sind 1967 zum ersten Male als Radiopulsare entdeckt worden. Heute sind über 1500 solcher Objekte katalogisiert. Rotierende Neutronensterne erscheinen nur dann als Radiopulsare, wenn sie eine kräftige Magnetosphäre tragen, deren magnetisches Moment nicht parallel zur Rotationsachse liegt (Abb. 8.15). Die Radiostrahlung der Pulsare entsteht durch Plasma, das von der magnetischen Polregion wegfleht. Durch die Rotation der Sterne ergibt sich so ein Leuchtturmeffekt. Nur wenn der Strahlenkegel eines magnetischen Pols die Sichtlinie eines Radioteleskops trifft, registriert dies einen kurzen Radiopuls. Deswegen sind bei weitem nicht alle Pulsare sichtbar.

Durch ein genaues Vermessen der Ankunftszeiten dieser Pulse gelingt es, die Rotationsperioden der Pulsare bis auf 10^{-12} s genau zu bestimmen. Deshalb kann auch die zeitliche Veränderung der Periode $\dot{P}$ bestimmt werden. Die Verteilung der beobachteten Perioden P ist in Abb. 8.16 dargestellt. Die meisten Pulsare haben Perioden im Bereich von einer Sekunde, das Maximum liegt bei etwa 5 Sekunden. Es ist jedoch klar zu sehen, dass noch eine weitere

⁴J. Cottam et al., Nature 420 (2002) 51

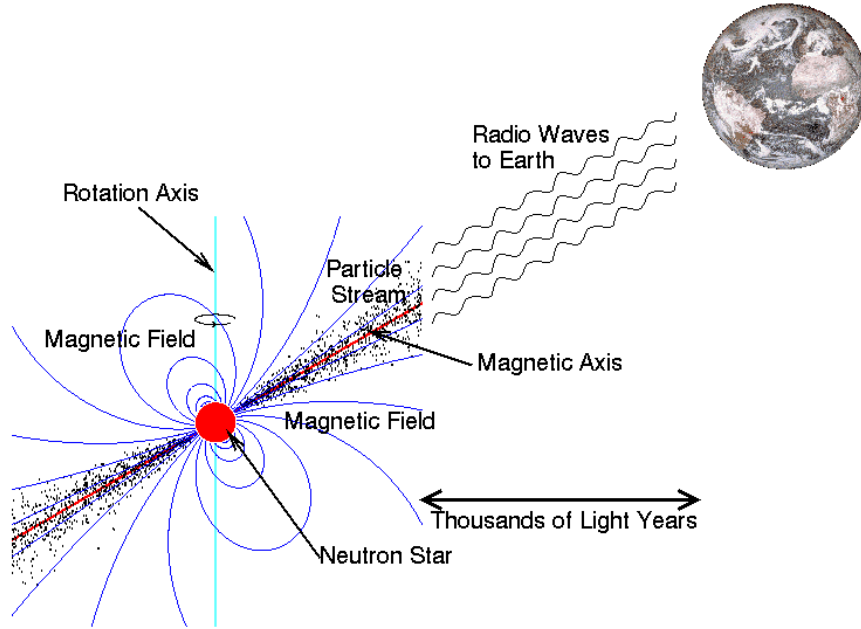


Abbildung 8.15: Ein Radiopulsar ist ein schnell rotierender Neutronenstern, dessen magnetisches Moment nicht parallel zur Rotationsachse liegt.

Klasse von Pulsaren existiert, deren Perioden sehr kurz sind. Dies sind die sog. **Millisekundenpulsare**, deren Abbremsrate ungemein klein ausfällt. Die ersten Pulsare dieser Art wurden erst 1982 entdeckt (PSR 1937+21).

Ein Pulsar ist ein perfekter Rotator, dessen Energie durch das Trägheitsmoment $I \simeq 0.4 MR^2$ und die Rotationsperiode P gegeben ist

$$E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I \Omega^2 = 2\pi^2 I P^{-2}. \quad (8.37)$$

Solche Neutronensterne können im Prinzip mit einer minimalen Periode P_c rotieren, die der Zerreißgrenze entspricht

$$P_c = \frac{2\pi}{\Omega_K(R)} = \frac{2\pi R}{c} \sqrt{\frac{c^2 R}{GM}} \simeq 0.6 \text{ ms}. \quad (8.38)$$

Dies gilt für $M = 1.4 M_\odot$ und $R = 10 \text{ km}$. Die beobachtete Abbremsung ergibt deshalb direkt ein Maß für den Rotationsenergieverlust

$$\dot{E}_{\text{Rot}} = -4\pi^2 I \frac{\dot{P}}{P^3} \simeq 10^{-2} L_\odot \frac{\dot{P}}{10^{-15}} \left(\frac{s}{P}\right)^3. \quad (8.39)$$

Die kürzeste beobachtete Periode liegt bei 1.4 Millisekunden. Bis heute sind keine Radiopulsare gefunden worden, die schneller rotieren. Die beobachtete Radiostrahlung (sowie Röntgen- und Gammastrahlung in einigen Fällen) stellt nur einen geringen Bruchteil dieses Energieverlustes dar. Die meiste Energie geht in einen Paarwind, der durch die rotierende

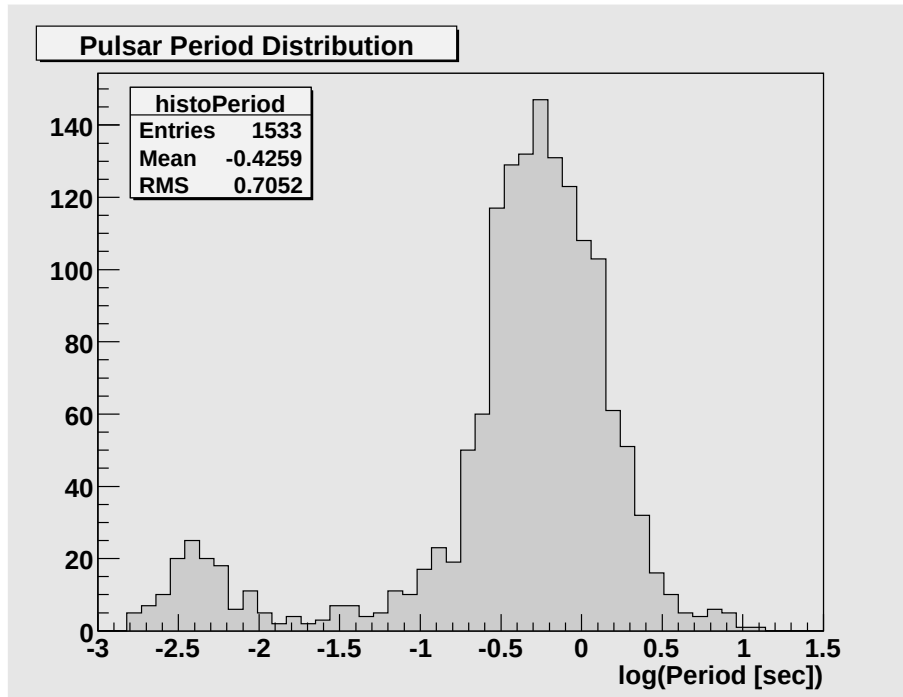


Abbildung 8.16: Die Verteilung der Perioden und deren zeitlicher Ableitung $\dot{P}$ für 368 Pulsare. Die sog. „Death Line“ (Hades–Linie) kennzeichnet eine Grenze, jenseits von der keine Pulsare gefunden worden sind. Die eingekreisten Symbole kennzeichnen Pulsare in Doppelsternsystemen.

Magnetosphäre auf beträchtliche Energien beschleunigt wird (s. Krebsnebel). Aus der Form des Krebsnebelspektrums kann man ableiten, dass der Paarwind mit einem Lorentzfaktor von 10^6 auf den Innenrand des Nebels prallt und dann Synchrotronstrahlung erzeugt. Die Nebelstrahlung von $10^5 L_{\odot}$ geht auf diesen Energieverlust des zentralen Neutronensterns zurück.

Röntgensterne

Es gibt viele Doppelsternsysteme, die Neutronensterne als Partnerstern enthalten (ganz in Analogie zu Weißen Zwergen). Füllt der Partnerstern das Roche–Volumen aus, so fließt Materie ab und bildet um den Neutronenstern ein Akkretionsscheibe (Abb. 8.17).

Mit Hilfe des NASA–Röntgenteleskop Chandra hat eine Team von Astronomen die Vermutung bestätigt, dass im dichten Zentrum von Kugelsternhaufen durch enge Begegnungen von Einzelsternen neue Röntgen-Doppelsternsysteme entstehen können. Diese Doppelsterne haben damit eine andere Entstehungsgeschichte als ihre Verwandten außerhalb von Kugelsternhaufen.

Massen der Neutronensterne

Aus Beobachtungen an Doppelsternsystemen ist es zwar gelungen, die Massen der Neutronensterne zu bestimmen (Abb. 8.18), jedoch nicht ihre Radien. Die Massen der Neutronensterne

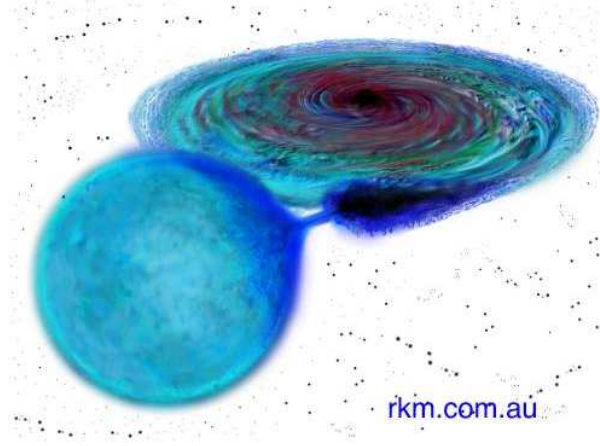


Abbildung 8.17: Schema eines engen Röntgendoppelsternsystems. Ein normaler Stern (sonnenartig) füllt seine Roche–Grenze aus und treibt einen feinen Plasmastrahl in Richtung des Neutronensterns. Diese Plasma besitzt Drehimpuls und bildet deshalb innerhalb der Roche–Fläche eine Akkretionsscheibe. Durch Reibung im Scheibenplasma bewegt sich diese langsam auf spiralförmigen Bahnen auf den Neutronenstern (oder Weißen Zwergen oder Schwarzes Loch) zu und erhitzt sich dabei.

liegen alle im Bereich der Chandrasekhar Masse von $1.4 M_{\odot}$ mit einer geringen Streuung. Diese Tatsache hängt wohl mit der Bildung der Neutronensterne im Supernova–Kollaps zusammen, ist aber im wesentlichen nicht verstanden.

8.4.3 Schwarze Löcher

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie können nicht beliebig massereiche Neutronensterne existieren. Eine realistische Obergrenze dürfte bei $2 M_{\odot}$ liegen. Wird auf einen Neutronenstern immer mehr Materie abgelagert, so muß er kollabieren. Es bildet sich ein Schwarzes Loch mit Radius r_H in Form eines Horizontes, hinter dem jede Form von Materie verschwindet. Die Gravitation ist in diesem Bereich so stark, dass selbst Photonen nicht entweichen können. Das Linienelement nicht–rotierender Schwarzer Löcher ist allein durch die Masse M des Objektes bestimmt (globale Schwarzschild–Lösung)

$$ds^2 = \exp(2\Phi(r)) c^2 dt^2 - \exp(2\Lambda(r)) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (8.40)$$

wobei nun gilt

$$\exp(2\Phi(r)) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad , \quad \exp(-2\Lambda(r)) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (8.41)$$

Photonen, die in der Nähe des Schwarzschild–Radius $R_S = 2GM/c^2$ emittiert werden, erreichen den asymptotischen Bereich mit unendlicher Rotverschiebung. Die Sphäre mit Radius $r_H = R_S$ wird deshalb als **Horizont** bezeichnet. Im Unterschied zu einem Neutronenstern besteht ein Schwarzes Loch nur aus Feldenergie, die Materie spielt keine Rolle mehr. Dies gilt allerdings nicht mehr am Punkt $r = 0$, wo die Krümmungstensoren divergieren, hier treten unendliche Gezeiteneffekte auf – ein Raumschiff, das auf das Zentrum eines Schwarzen

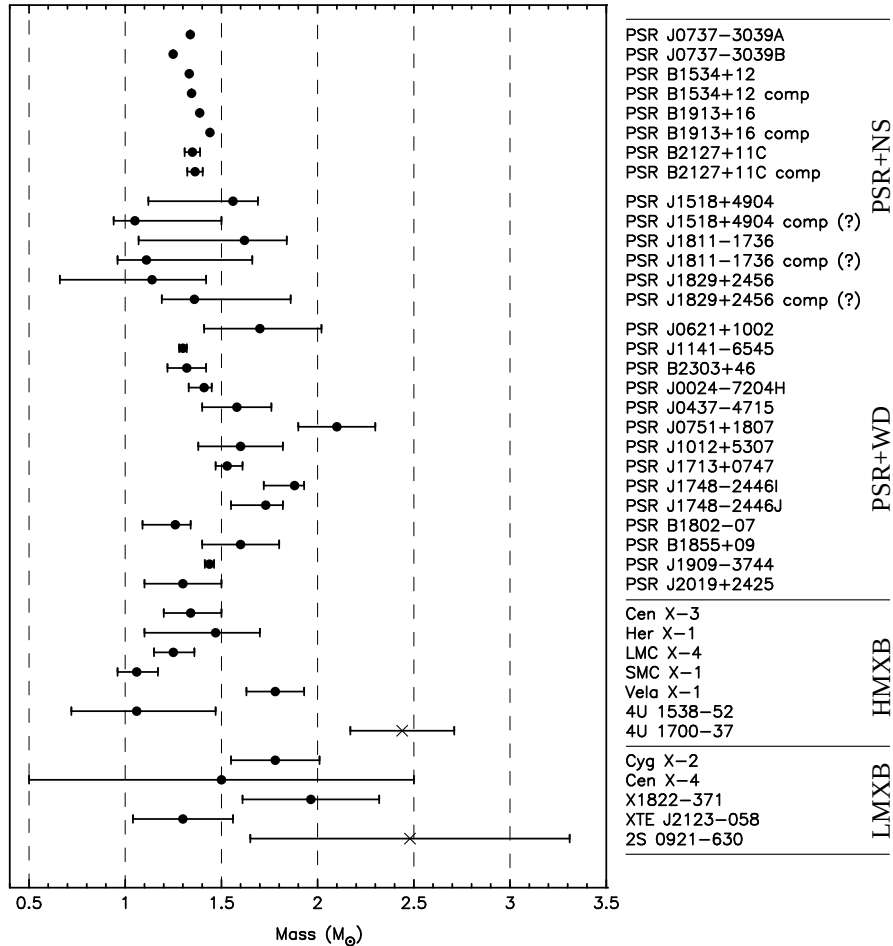


Abbildung 8.18: Massen von Neutronensternen in Doppelsternsystemen, wobei der eine Partner ein Radiopulsar (PSR) oder ein Röntgenstern (HMXB, LMXB) ist. Die besten Massen erhält man aus Systemen, die aus 2 Neutronensternen bestehen (obere Hälfte). Die meisten Pulsare haben Weiße Zwerge (WD) als Partner.

Lochs zusteuert, wird in Stücke zerrissen. Man spricht hier von einer Singularität des Schwarzen Lochs, die allerdings durch den Horizont vor den Blicken eines Beobachters verdeckt bleibt.

Alle Objekte des Universums besitzen Drehimpuls (Sonne, Planeten usw.), so auch ein Schwarzes Loch. Rotierende Schwarze Löcher werden nicht mehr durch die Schwarzschild-Metrik beschrieben. Rotierende Schwarze Löcher sind allein durch ihre Masse M_H und ihren Drehimpuls J_H gekennzeichnet (das ist das sog. **Glatzen-Theorem**). Sie sind Lösungen der Einsteinschen Vakuum-Gleichungen. Die allgemeinste Lösung ist von Roy Kerr 1963 gefunden worden. Sie wird als **Kerr-Lösung** bezeichnet. Das Linienelement enthält nun auch einen

nicht-diagonalen Term

$$ds^2 = \alpha^2 c^2 dt^2 - R^2 (d\phi - \omega dt)^2 - \exp(2\mu_r) dr^2 - \exp(2\mu_\theta) d\theta^2. \quad (8.42)$$

Die 5 Funktionen α , R , ω , μ_r und μ_θ hängen vom Radius r und vom Breitenwinkel θ ab, jedoch nicht von ϕ (achsensymmetrische Lösung). Diese Funktionen können durch elementare Funktionen ausgedrückt werden

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (8.43)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (8.44)$$

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \quad (8.45)$$

Es treten nur 2 freie Parameter M und a auf. Die metrischen Funktionen lauten damit

$$\alpha^2 = \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2} \quad (8.46)$$

$$R = \frac{\Sigma}{\rho} \sin \theta \quad (8.47)$$

$$\omega = \frac{2aMr}{\Sigma^2} \quad (8.48)$$

$$e^{\mu_2} = \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} \quad (8.49)$$

$$e^{\mu_3} = \rho \quad (8.50)$$

$$(8.51)$$

Im asymptotischen Bereich $r \gg GM/c^2$ erweist sich M als die Masse des Lochs (in geometrischen Einheiten GM/c^2) und a als der spezifische Drehimpuls der Quelle, $J_H = aM$ ist dann der Gesamtdrehimpuls. Der Horizont rotiert i.a. mit einer Geschwindigkeit, die kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein muß. Für ein nichtrotierendes Schwarzes Loch ist der Horizontradius durch den Schwarzschild Radius R_S gegeben ($J_H = 0$)

$$r_H = R_S = 2 \frac{GM_H}{c^2} = 3 \text{ km} \frac{M}{M_\odot}. \quad (8.52)$$

Neutronensterne von $1.4 M_\odot$ haben einen Radius von $\simeq 2.5 R_S$, sind also bereits sehr kompakt. Besitzt die kollabierende Materie Drehimpuls, so erhält auch das Loch einen Drehimpuls und rotiert. Hier gilt für den Horizontradius, $\alpha(r_H) = 0$, d.h. $\Delta(r_H) = 0$ und damit

$$r_H = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \frac{a^2}{c^2}}, \quad (8.53)$$

wobei $a = J_H/M_H$ den spezifischen Drehimpuls darstellt mit $|a| \leq (GM/c) = 0.5 R_S c$. Für ein maximal rotierendes Loch, $a = GM/c$, beträgt der Horizontradius nur noch $0.5 R_S$. Es ist interessant, den spezifischen Drehimpuls für einen Millisekundenpulsar auszurechnen

$$a_* = \frac{J_*}{M_*} = 0.4 R_*^2 \Omega_* = 0.4 \frac{R_*}{R_S} \sqrt{0.5 \frac{R_S}{R_*}} R_S c \frac{P_c}{P} \leq 0.5 R_S c. \quad (8.54)$$

Ein kritisch rotierender Neutronenstern, $P \simeq P_c$, würde gerade $a_* \simeq 0.5 R_S c$ erreichen. Dies ist die Bedeutung der extremen Kerr-Lösung mit $a_H = GM_H/c$: hier rotiert der Horizont

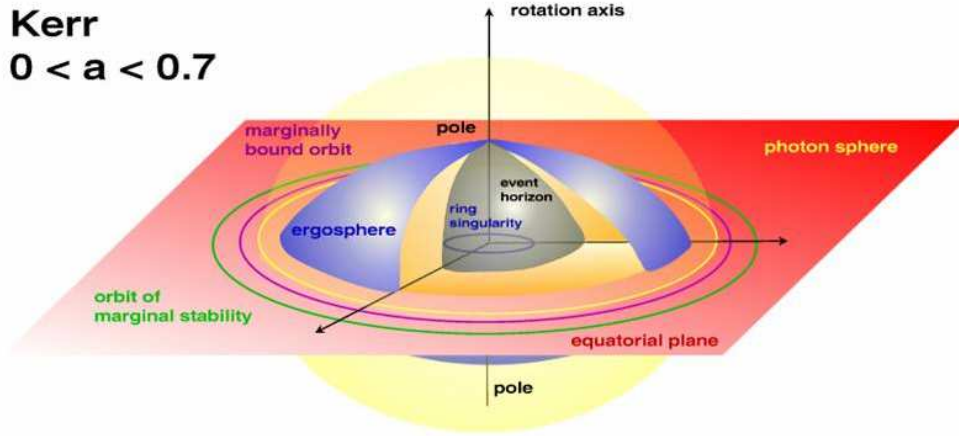


Abbildung 8.19: Meridionaler Schnitt durch ein rotierendes Schwarzes Loch. Die äußerste Begrenzung ist die Ergosphäre, dann schließt sich der Horizont an und im Zentrum ist die Ringsingularität sichtbar, welche die Quelle der Gravitation darstellt. Die Gravitation des Schwarzen Lochs wird durch einen singulären rotierenden Massenstrom erzeugt, der allerdings hinter dem Horizont versteckt bleibt.

kritisch, was in diesem Falle der Lichtgeschwindigkeit entspricht. Der Horizont rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω_H

$$\Omega_H \equiv \omega(r_H) = \frac{1}{2} \frac{a}{GM/c} \frac{c}{r_H} \quad (8.55)$$

gegenüber den Fixsternen. Dies entspricht einer **Rotationsperiode** P_H von

$$P_H = \frac{2\pi}{\Omega_H} \simeq 0.8 \text{ ms} \frac{GM/c}{a} \frac{M}{10 M_\odot}. \quad (8.56)$$

Diese Rotation des Horizontes ist allerdings nicht direkt messbar, wie etwa bei der Sonne, sondern kann nur indirekt, wenn überhaupt, erschlossen werden.

Der Horizont eines schnell rotierenden Schwarzen Lochs ist von der sog. **Ergosphäre** umgeben (Abb. 8.19), die sich am Äquator bis zu einem Schwarzschild–Radius erstreckt. Der Rand der Ergosphäre ist wie folgt gegeben

$$r_E(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (8.57)$$

Ein Körper kann innerhalb der Ergosphäre nicht ruhen; würde er dies tun, so wäre der Tangentialvektor seiner Weltlinie raumartig, d.h. der Körper würde sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen. Weitere Untersuchungen zeigen, dass ein Körper innerhalb der Ergosphäre immer in Richtung der Drehung des Schwarzen Loches um die Drehachse des Schwarzen Lochs rotieren muss (jede Form von Materie wird zur Mitrotation gezwungen). Dies ist ein absolut neues Phänomen, das in der Newtonschen Physik nicht existiert⁵. Innerhalb der Ergosphäre

⁵Auch die Rotation der Erde erzeugt eine Mitrotation, die zu einer Präzession von Gyroskopen führt. Dieser Effekt der Einsteinschen Gravitationstheorie soll mit dem Stanford Experiment **Gravity Probe B, GPB**, getestet werden, das 2005–2006 im Orbit war. Es handelt sich hier um eines der schwierigsten Präzisionsexperimente der Physik.

können Körper zudem negative Energie besitzen. Damit ist es möglich, aus dem Schwarzen Loch Energie zu extrahieren. Physikalisch sind dazu starke Magnetfelder notwendig.

Die Quelle der Gravitation eines rotierenden Schwarzen Lochs ist ein singulärer Massen–Ring–Strom (Abb. 8.19), wo die Komponenten des Krümmungstensors wieder divergieren. Dies ist in Analogie zu sehen zu einem elektrischen Ringstrom, der ein magnetisches Dipolfeld erzeugt. Das ist natürlich eine mathematische Singularität, in Realität sollte dieser Massenstrom räumlich ausgedehnt sein. Eine Lösung dieses Problems ist bisher jedoch nicht absehbar.

Schwarze Löcher als Astronomische Objekte

Schwarze Löcher sind die kompaktesten Objekte des Kosmos (Abb. 8.20). Sie bilden eine Art Grundzustand der Gravitation. Der Nachweis der Schwarzen Löcher ist schwierig, da die

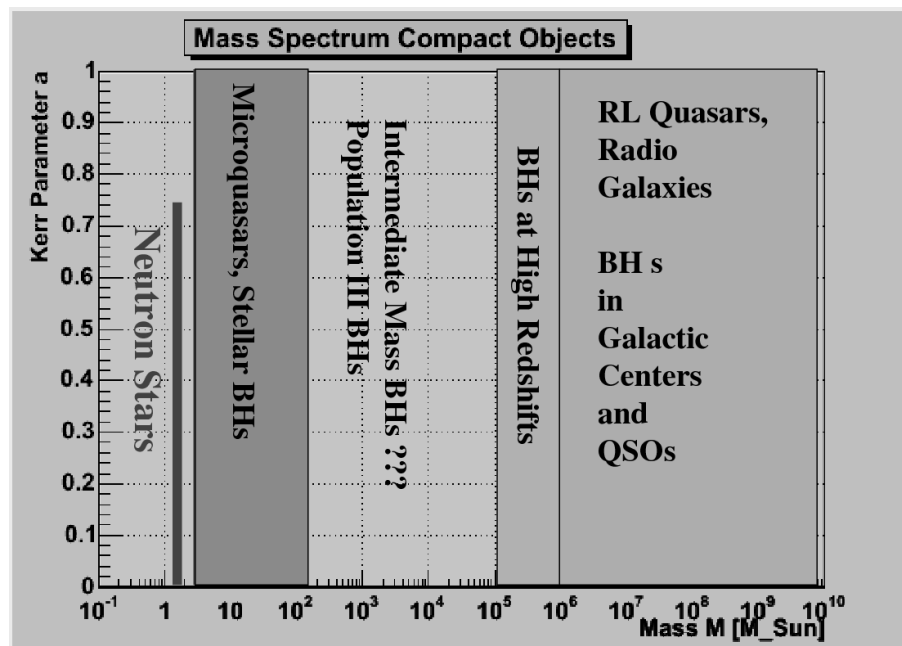


Abbildung 8.20: Astronomische Schwarze Löcher (SL) sind allein durch ihre Masse und ihren Drehimpuls (Kerr Parameter a) bestimmt. Wir unterscheiden heute drei Massenbereiche: (i) stellare SL (Mikroquasare), (ii) intermediäre SL, die noch hypothetisch sind, (iii) SL in Zentren von Galaxien (Quasare, Radiogalaxien).

Oberfläche dieser Objekte nach Definition nicht strahlen kann. Man sucht deshalb nach Doppelsternsystemen mit kompakten Partnern, deren Masse die Obergrenze für Neutronensterne übersteigt. Diese Systeme zeigen i.a. schnell veränderliche Röntgenstrahlung (mit Flickering im Bereich von ms). Die besten Kandidaten sind heute Cygnus X–1 (hat einen O Stern mit Masse von $20 - 25 M_{\odot}$ als Partner), GX 339–4, LMC X–1 und A0620–00 (mit massearmen Begleitern). Es handelt sich dabei jeweils um *spektroskopische Doppelsterne*. Die optische Quelle zeigt eine Doppleramplitude in der Radialgeschwindigkeit von $v = v_0 \sin i$, wenn i

die Inklination zwischen der Sichtlinie und der Normalen zur Bahnebene darstellt. Die beiden Bahnen haben Radien a_1 und a_2 . Zusammen mit $M_1 a_1 = M_2 a_2$ und der Halbachse $a = a_1 + a_2$ ergibt sich

$$a_1 = \frac{a M_2}{M_1 + M_2} \quad (8.58)$$

sowie die wahre Geschwindigkeit

$$v_{0,1} = \frac{2\pi a_1}{P} \quad (8.59)$$

mit der Bahnperiode P (typisch Tage oder Stunden). Daraus erhalten wir die beobachtete Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P} \sin i = \frac{2\pi a}{P} \frac{M_2 \sin i}{M_1 + M_2}. \quad (8.60)$$

Wir ersetzen nun a durch das 3. Keplersche Gesetz

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} a^3 \quad (8.61)$$

und erhalten daraus die *Massenfunktion*

$$f(M_1, M_2, \sin i) = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{v_1^3 P}{2\pi G}. \quad (8.62)$$

Häufig kann M_1 aus dem Spektraltyp des optischen Begleiters abgeleitet werden und $\sin i$ aus Bedeckung abgeschätzt werden. Damit erhält man dann eine Untergrenze an die Masse M_2 des kompakten Begleiters. Im Falle von Cyg X-1 ergibt sich $M_2 \simeq (10 - 15) M_\odot$. Die Massenfunktionen der massearmen Systeme betragen einige Sonnenmassen. Im Falle von A0620-00 ist der Partnerstern ein K-Zwerg mit $0.7 M_\odot$, das System hat eine Bahnperiode von 7.75 h und die Doppleramplitude beträgt 450 km s^{-1} . Damit können wir die Massenfunktion nach der Masse M_2 des kompakten Begleiters auflösen

$$M_2 = \frac{P v_1^3}{2\pi G} \frac{1}{\sin^3 i} \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \quad (8.63)$$

Da keine Bedeckungen sichtbar sind, gilt $i < 80^\circ$, und deshalb bekommt man eine untere Schranke an die Masse des kompakten Begleiters

$$M_2 > 3.18 M_\odot, \quad M_1 = 0.7 M_\odot. \quad (8.64)$$

Diese Masse liegt eindeutig über der Massengrenze für stabile Neutronensterne.

In den letzten Jahren sind im Röntgenbereich und Radiobereich neue Kandidaten für stellare Schwarze Löcher entdeckt worden (1E 1740.7-2942, GRS 1915+105, GRO J1655-40), die sich teilweise im Bereich des galaktischen Zentrums befinden. Die beiden letzten Quellen sind sog. Mikro-Quasare, da sie relativistische Jets aufweisen, die eine Geschwindigkeit von $0.92 c$ zeigen. Es ist interessant, dass auch die stellaren Schwarz-Loch Kandidaten relativistische Jets haben, in Analogie zu den supermassereichen Schwarzen Löchern in elliptischen

Galaxien. An sich enthält unsere Galaxis wahrscheinlich etwa eine Million stellarer Schwarzer Löcher, nur wenige sind bis heute gefunden worden.

Neben den stellaren Schwarzen Löchern vermutet man in den Zentren von Galaxien supermassereiche Schwarze Löcher mit Massen von einigen Mio. bis zu 10 Mia. Sonnenmassen in Riesenellipsen. Die Galaxie M 87 im Zentrum des Virgo Haufens ist der beste Kandidat für eine Masse von 3 Mia. Sonnenmassen (aufgrund von Beobachtungen mit HST). Unser Galaktisches Zentrum beherbergt ein Schwarzes Loch mit einer Masse von 3 Millionen Sonnenmassen.

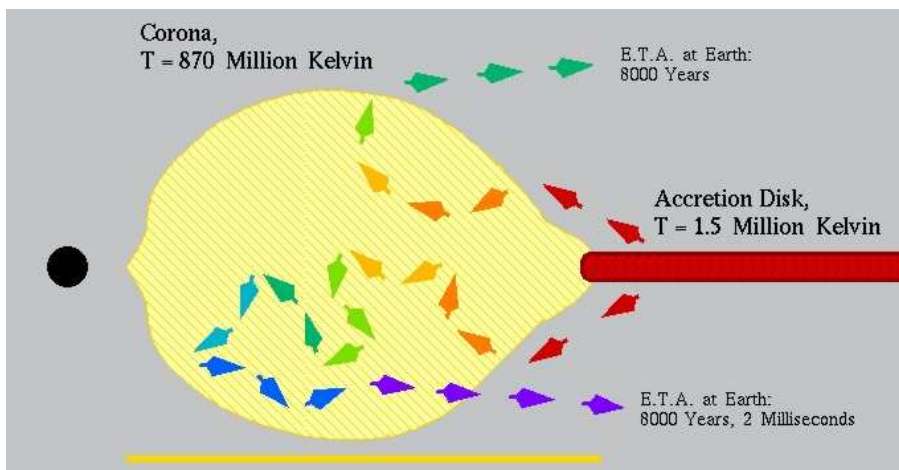
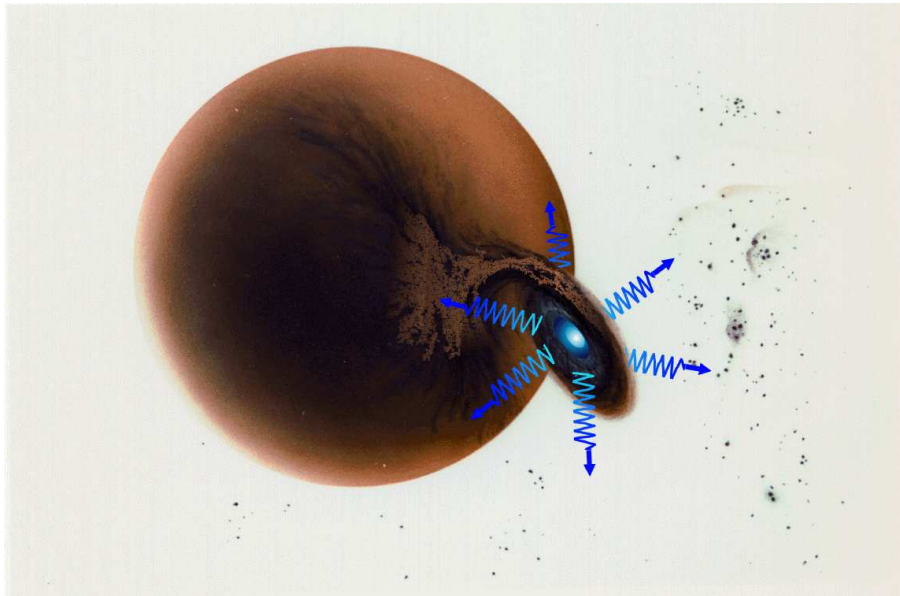


Abbildung 8.21: Cygnus X-1 ist der dunkle Begleiter in einem Doppelsternsystem mit einer Bahnperiode von 5.6 Tagen. Der sichtbare Stern ist ein massereicher O-Stern, der dunkle Begleiter ein Schwarzes Loch mit einer Masse von 10 Sonnenmassen (oben). Materie strömt durch den inneren Lagrange-Punkt und bildet eine Akkretionsscheibe um den dunklen Begleiter. Die optische Strahlung wird durch den Stern dominiert. Die Röntgenstrahlung entsteht durch Streuung von weichen Photonen an heissen Elektronen im innersten Teil der Scheibe (unten). Dieses Gebiet ist sehr kompakt (ca. 50 Schwarzschild-Radien).

Vertiefung

Abbildungsverzeichnis

5.1	Der Beitrag zum Strahlungsstrom in Richtung der Normalen zu einer Fläche.	117
5.2	UBV Transmission	119
5.3	Spektrum der Schwarzkörperstrahlung	122
5.4	Effektiv-Temperatur	123
5.5	Hintergrundstrahlung	125
5.6	Detektierte Strahlung	128
5.7	Strahlung einer Gaskugel	129
5.8	Massenabsorptionskoeffizient von Staub	131
5.9	Atomare Prozesse	134
5.10	Wasserstoff Transitions	138
5.11	Bremsstrahlung an Ionen	139
5.12	Kühlfunktion des interstellaren Gases	141
5.13	Geometrie der Synchrotronstrahlung	142
5.14	Monoenergetisches Synchrotronspektrum	143
5.15	Der Krebsnebel M1	144
5.16	Spektrum des Krebsnebels	145
5.17	Inverse Compton-Streuung	146
6.1	Stern-Parallaxe	152
6.2	Lichtablenkung im Sonnensystem	154
6.3	Effektivtemperatur	156
6.4	Kugelsternhaufen M15	159
6.5	HRD von M55	160
6.6	Sternspektren Übersicht	162
6.7	Sternspektren und Farbindex	163
6.8	O – A Sterne	164
6.9	A – F Sterne	165
6.10	Effektivtemperatur und Farbindex	166
6.11	Das HRD	167
6.12	Hipparcos HRD	168
6.13	Leuchtkraftklassen der B1 Sterne	169
6.14	Spektren von L Zwergen	170
6.15	Braune Zwerge	172
6.16	Braune Zwerge im Orion	173
7.1	Solare Konvektion	177
7.2	Solare Granulation	178

7.3	Zustandsebene eines stellaren Gases	183
7.4	Stellare Opazitäten	184
7.5	Rosseland–Opazitäten in Sternatmosphären	185
7.6	Nukleare Bindungsenergieen	188
7.7	Proton–Proton–Ketten im Sterninneren.	189
7.8	CNO Zyklus	189
7.9	Triple alpha Prozeß	190
7.10	Nukleare Energieerzeugungsraten	191
7.11	Zentraltemperatur gegen Zentraldichte als Funktion der Masse	193
7.12	Masse–Leuchtkraft Beziehung	196
7.13	Masse–Radius Beziehung	197
7.14	Temperatur–Masse Beziehung	198
7.15	Strukturfunktionen eines sonnenartigen Sterns	200
7.16	Theoretische Hauptreihe	201
7.17	Strukturfunktionen eines B Sterns	202
7.18	Struktur der Hauptreihensterne	203
7.19	Die Lage der Pop III Sterne im HRD	205
7.20	Hayashi–Linie	206
7.21	Vorhauptreihensterne	208
7.22	Sonnenneutrino Prozesse	215
7.23	Sonnenneutrino Spektrum	216
7.24	Sonnenneutrino Experimente	217
7.25	Sonnenflecken	220
7.26	Sonnenfleckenzahl	221
7.27	Sonnenflecken historisch	222
7.28	Solarwind	223
8.1	IMF im Orion	230
8.2	Entwicklungswege von massearmen Sternen	231
8.3	Zeitliche Entwicklung der Sonne im HRD	233
8.4	Entwicklung des Sonnenradius als Funktion der Zeit.	234
8.5	5 Sonnenmassen Stern	235
8.6	Entwicklungswege von massereichen Sternen	236
8.7	Eskimo Nebel HST	237
8.8	Struktur eines massereichen Sterns	238
8.9	Lichtkurve der SN 1987A	239
8.10	Hypernova	240
8.11	Masse als Funktion der Dichte für Weiße Zwerge	242
8.12	Massen–Radius Beziehung für Weiße Zwerge	244
8.13	Struktur eines Neutronensterns	246
8.14	Massen–Radius Beziehung für Neutronensterne	248
8.15	Struktur Radiopulsar	250
8.16	Perioden der Pulsare	251
8.17	Kompakte Doppelsternsysteme	252
8.18	Massen der Neutronensterne	253
8.19	Anatomie des Schwarzen Lochs	255
8.20	Astronomische Schwarze Löcher	256

<i>Abbildungsverzeichnis</i>	263
8.21 Cygnus X-1	259

Tabellenverzeichnis

5.1	Hauptreihensterne und ihre Helligkeiten	149
6.1	Hipparcos–GAIA	153
6.2	Stellare Parameter	158