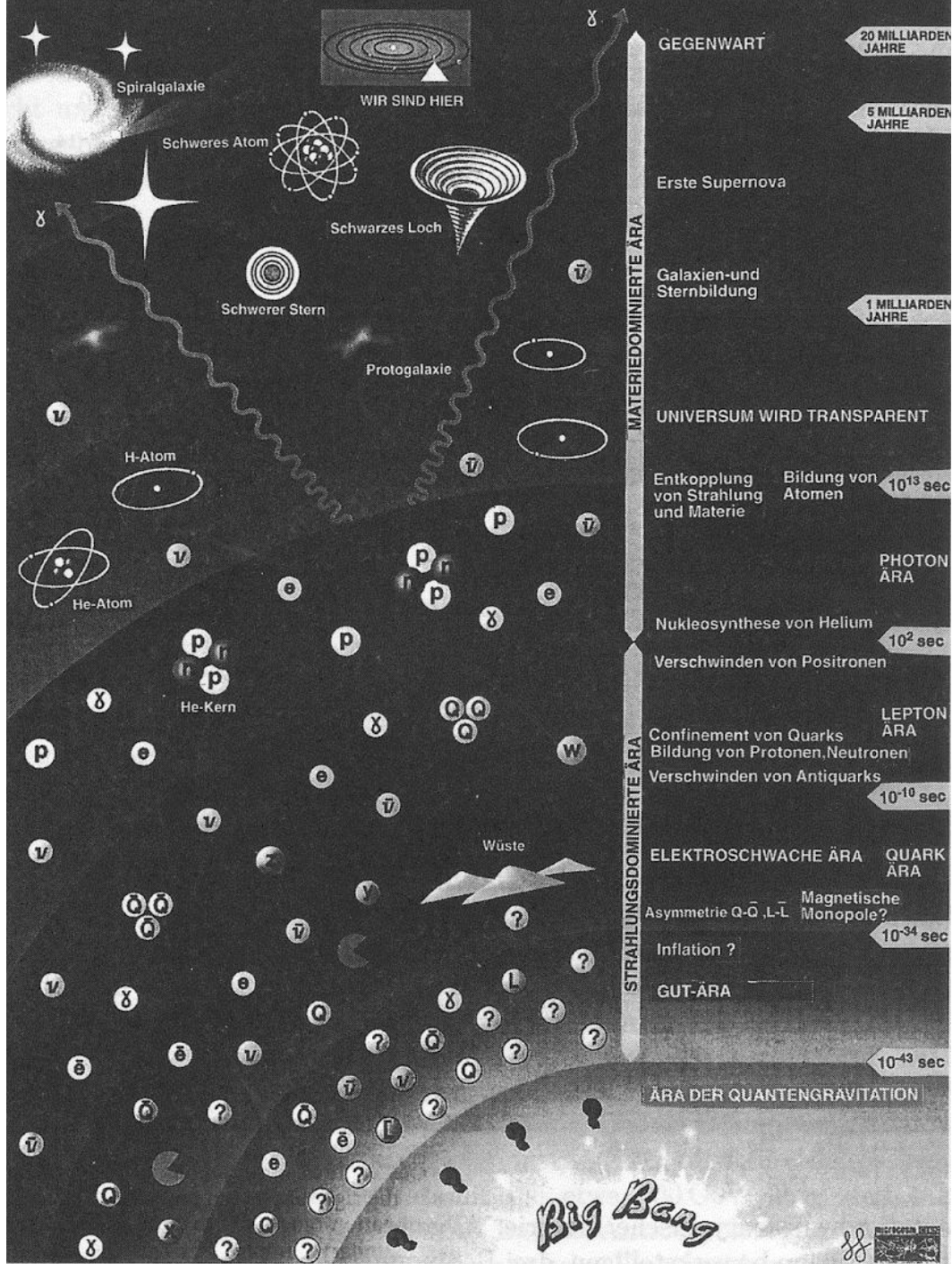


EINFÜHRUNG IN DIE KOSMOLOGIE

Prof. Dr. W. de Boer

— 29. April 2004 —

Entwicklung des Universums



Vorwort

Dieses Skript basiert auf den Büchern *Introduction to Cosmology* von Matts Roos (Wiley, 2004), *Cosmology and Astroparticle Physics* von Lars Bergström und Ariel Goobar (Springer, 2004) und *An Introduction to Cosmology* von Jeremy Bernstein (Prentice Hall, 1995) auf.

Zur weiteren Vertiefung des Stoffes seien die folgenden Lehrbücher vorgeschlagen:

1. Weigert, Wendker: *Astronomie und Astrophysik*, 1988
2. Weinberg: *Gravitation und Kosmologie*, 1971
3. Goenner: *Einführung in die Kosmologie*, 1994
4. Turner, Kolb: *The early Universe*, 1990; sowie Börner, 1991
5. Coles, Lucchin: *Cosmology*, 1995
6. de Boer: *GUTs and SUSYs in Particle Physics and Cosmology*, 1994
7. Klapdor-Kleingrothaus, Zuber: *Teilchenastrophysik*, 1997

Zusätzlich erscheinen beispielsweise im *Spektrum der Wissenschaft* regelmäßig Artikel in den Gebieten Kosmologie und Teilchenphysik. Als populärwissenschaftliche Bücher sind zu nennen:

1. Schramm: *The shadows of creation*, 1991
2. Parker: *The vindication of the Big Bang*, 1993
3. Weinberg: *Die ersten drei Minuten*
4. Fang, Li: *The creation of the Universe*

Sinn dieser Vorlesung ist es, einen Einblick in die Kosmologie zu geben. Es werden keine Vorkenntnisse über die allgemeine Relativitätstheorie (ART) erwartet. Am Ende eines jeden Kapitels sind einige Übungsaufgaben aufgeführt, welche zum Verständnis der Formeln gerechnet werden sollten.

Eine Kombination als Prüfungsfach im experimentellen Nebenfach ist zur Zeit mit folgenden Veranstaltungen möglich:

- Einführung in die Experimentelle Teilchenphysik (2 SWS)

- Hauptseminar "Der Urknall und seine Teilchen" (2 SWS)
- Übungen zur Kosmologie (2 SWS)
- Experimentelle Elementarteilchenphysik (2 SWS)
- Übungen zur Elementarteilchenphysik (2 SWS)

Inhaltsverzeichnis

1	Von Newton zu Hubble	11
1.1	Das Newtonsche Universum	11
1.1.1	Kosmologisches Prinzip	11
1.1.2	Olbers Paradoxon	12
1.2	Kosmologische Einheiten	12
1.3	Gesetz von Hubble	13
1.3.1	Relativistische Rotverschiebung	15
1.3.2	Abstandsmessungen	17
1.4	Expansion des Universums	20
1.4.1	Expansion nach Newton	20
1.4.2	Dichteparameter Ω_0	22
1.4.3	Bremsparameter q_0	22
1.4.4	Altersbestimmung des Universums	23
1.5	Übungen	23
2	Die Metrik der Raumzeit	25
2.1	Minkowski-Metrik	25
2.2	Robertson-Walker-Metrik	27
2.2.1	Mitbewegende Koordinaten	27
2.3	Das Prinzip der Kovarianz	30
2.4	Übungen	31
3	Gravitation	33
3.1	Scheinkraft	33
3.2	Das Prinzip der Äquivalenz	33
3.3	Licht im Gravitationsfeld	35
3.4	Die Krümmung der Raumzeit	38
3.5	Einsteins Feldgleichungen	39
3.6	Experimente	40
3.6.1	Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c	40
3.6.2	Licht empfindet Gravitation	40
3.6.3	Träge Masse $m_T \equiv$ Schwere Masse m_S	41
3.7	Übungen	41

4	Kosmologische Modelle	43
4.1	Schwarzschild-Radius	43
4.1.1	Schwarze Löcher	44
4.1.2	Quantenmechanische Betrachtung	45
4.2	Feldgleichungen der Relativitätstheorie	46
4.2.1	Die Kosmologische Konstante λ	48
4.2.2	Erhaltungssätze	49
4.2.3	Zeitentwicklung	50
4.3	Inflationäres Szenario	52
4.4	Dynamische Parameter	53
4.4.1	Hubble-Diagramm der Supernovae vom Typ Ia	53
4.4.2	Anisotropie der Mikrowellenstrahlung	54
4.4.3	Fazit	54
4.5	Übungen	54
5	Thermodynamik	61
5.1	Elektromagnetische Strahlung	61
5.1.1	Der schwarze Körper	61
5.1.2	Stefan-Boltzmann-Gesetz	62
5.2	Adiabatische Expansion	62
5.2.1	Energiedichten	63
5.2.2	Relativistische Teilchen	64
5.2.3	Nichtrelativistische Teilchen	64
5.3	Freeze-Out	65
5.3.1	Freiheitsgrad g	65
5.3.2	Teilchenstatistiken	66
5.3.3	Die Entkoppelung	66
5.4	Übungen	67
6	Der frühe Kosmos	69
6.1	Kosmische Hintergrundstrahlung	69
6.1.1	Rekombination	69
6.1.2	Extraterrestrische Messungen	70
6.2	Anisotropien im Mikrowellenhintergrund	71
6.2.1	Eigengeschwindigkeit	71
6.3	Nukleosynthese	72
6.3.1	Entstehung der leichten Elemente	72
6.3.2	Die schweren Elemente	74
6.3.3	Massenverhältnisse	75
6.4	Übungen	77
7	Teilchenphysik	79
7.1	Spinraum in der Quantenmechanik	79
7.1.1	Einführung	79
7.1.2	Geometrische Betrachtung	80
7.1.3	Algebraische Betrachtung	80
7.2	Gruppentheorie	81

7.2.1	Eichtransformationen	81
7.2.2	Nichtkommutative Algebra	82
7.2.3	Vertauschungsinvarianz	83
7.2.4	Ladungsoperator	84
7.2.5	Isospin	85
7.2.6	Schwache Ladung	85
7.2.7	Schwache Hyperladung	85
7.3	Quarkmodell	86
7.3.1	Flavour	86
7.3.2	Ladung	87
7.3.3	Farbe	87
8	Symmetrien	91
8.1	Diskrete Symmetrien (C, P, T)	91
8.1.1	Parität	91
8.1.2	Helizität	92
8.1.3	Ladungskonjugation	93
8.1.4	Zeitumkehr	93
8.2	Spontane Symmetriebrechung	94
8.2.1	Beispiele	94
8.2.2	Das Higgsboson	95
8.3	Grand Unified Theory (GUT)	97
8.3.1	Phasenübergänge	97
8.3.2	Die erste Mikrosekunde	97
8.4	Neutrino-Oszillationen	100
8.4.1	Neutrinomassen	101
8.4.2	Sonnen-Neutrinos	101
8.4.3	Atmosphären-Neutrinos	105
8.4.4	Beschleuniger-Neutrinos	108
8.5	Übungen	111
9	Inflation	113
9.1	Probleme der Urknalltheorie	113
9.1.1	Problem der $B\bar{B}$ -Symmetrie	113
9.1.2	Horizontproblem	116
9.1.3	Problem der Raumzeit	117
9.1.4	Monopolproblem	118
9.1.5	Flachheitsproblem	119
9.2	Problem der Dynamischen Dunklen Materie	121
9.2.1	Spiralgalaxien	121
9.2.2	Galaxienhaufen	122
9.2.3	Kandidaten Dunkler Materie	122
9.3	Neue Inflation: Das chaotische Modell	123
9.4	Übungen	126

10 Entstehung von Galaxien	129
10.1 Dichtefluktuationen	129
10.1.1 Materieverteilung	129
10.1.2 Quadrupol-Anisotropie	129
10.1.3 Theoretische Beschreibung	131
10.1.4 Experimentelle Beschreibung	132
10.1.5 Jeans-Grenze	133
10.1.6 Adiabatische und isogekrümmte Fluktuationen	134
10.1.7 Postinflationäre Szenarien	134
10.1.8 Randbedingungen	135
10.2 Kalte dunkle Materie: WIMPs	135
10.3 Heiße dunkle Materie: Neutrinos	136
10.4 Übungen	137
Abbildungsverzeichnis	140
Tabellenverzeichnis	141
Literaturverzeichnis	143
Index	145

Kapitel 1

Von Newton zu Hubble

1.1 Das Newtonsche Universum

Zur Lebenszeit *Isaac Newtons* (1642–1727) wurde das heliozentrische Universum von *Nicolaus Copernicus* (1473–1543), *Galileo Galilei* (1564–1642) und *Johannes Kepler* (1571–1630) schließlich akzeptiert. Die Menschheit war „enthront“:

Wir leben auf einem durchschnittlich großen Planeten, der eine durchschnittlich große Sonne umkreist, die Teil einer durchschnittlich großen Galaxie ist.

Die erste Theorie von Newton über die Gravitation erschien, als er 1687 seine *Philosophiae Naturalis Principa Mathematica* veröffentlichte. Mit dieser Theorie konnte er die empirischen Gesetze von Kepler erklären. Ein früher Erfolg dieser Theorie war, als *Edmund Halley* (1656–1742) erfolgreich vorhersagte, daß der 1456, 1531 und 1607 gesehene Komet im Jahre 1758 erneut wiederkehren würde. Selbst heute reicht Newtons Theorie aus, um die meisten Planeten- und Satellitenbewegungen zu berechnen. Ebenso ist sie im nicht-relativistischen Grenzfall eine Darstellung der Relativitätstheorie von Einstein.

Nach dem heutigen *Standardmodell der Kosmologie* entstand das Universum im Urknall (Big Bang) aus einer anfänglichen Singularität und expandiert - wenn auch inzwischen sehr langsam - immer weiter. Bestätigt wird diese Theorie durch folgende Experimente:

- Rotverschiebung der Galaxien (Hubble; 1929)
- Kosmische Hintergrundstrahlung (Penzias, Wilson; 1964)
- Häufigkeiten der leichten Elemente

1.1.1 Kosmologisches Prinzip

Eine Verteilung wird *homogen* genannt, wenn deren Elemente gleichmäßig verteilt sind, und *isotrop*, wenn sie aus allen Raumrichtungen das gleiche Aussehen hat. Somit würde eine Materieverteilung in einem homogenen und isotropen

Universum immer gleich aussehen, unabhängig vom Standort des Beobachters. Ändert sich dieser Zustand nicht, so spricht man von einem statischen Universum. Newton postulierte damit das *Kosmologische Prinzip*:

Das Universum ist homogen und isotrop. Es war schon immer so, und wird es auch immer bleiben.

Es stellt sich die Frage, ob dieses Prinzip für alle Skalenbereiche gilt. Innerhalb von Galaxien gibt es Bereiche unterschiedlicher lokaler Materiedichten, und auch Galaxien selbst sind oft angehäuft (Cluster). Deshalb ist es notwendig, die Homogenität der Materie durch das Verhältnis $\delta N/N$ zu quantifizieren. N ist hierbei die Anzahl der Galaxien in einem zufällig ausgewählten Raumsegment, und δN die Standardabweichung des Mittelwertes von N . $\delta N/N \approx 0.5$ ergibt sich erst bei einem Beobachtungsradius von 100 MLj, was der Größe des Superhaufens „Virgo“, zu dem auch die Milchstraße gehört, entspricht. Zum Vergleich: Unsere Milchstraße hat einen Durchmesser von etwa 30 kpc oder 100 kLj.

1.1.2 Olbers Paradoxon

Nach Newtons Gravitationstheorie ziehen sich massive Körper an, was bei einem endlichen Universum dazu führen würde, daß dieses unter der Gravitationsanziehung kollabiert. Dies wurde aber nicht beobachtet, und Newton begründete diese Stabilität durch ein *unendliches Universum*: Die weiter außen liegenden Sterne heben die Gravitationskräfte im Inneren auf.

In einem unendlichen Universum gäbe es aber auch unendlich viele Sterne, die insgesamt unendlich hell leuchten würden. Unsere Nächte wären so hell wie die Sonne, und die Temperatur so hoch wie auf deren Oberfläche. *Wilhelm Olbers* (1758–1840) formulierte dieses Problem im Jahre 1823.

Nehmen wir an, die Anzahl der Sterne mit der durchschnittlichen Leuchtkraft L sei N und ihre durchschnittliche Dichte in einem Volumen V sei $n = N/V$. Mit der Sternoberfläche $A = 4\pi r^2$ ergibt sich die Helligkeit dieses Sterns zu

$$\Phi = L/4\pi r^2 \quad . \quad (1.1)$$

Die Anzahl der Sterne in einer Kugelschale mit dem Radius r und der Dicke dr ist $4\pi r^2 n dr$. Es folgt somit für die gesamte Strahlung

$$\int_0^\infty 4\pi r^2 n \Phi dr = \int_0^\infty n L dr = \infty \quad . \quad (1.2)$$

Für unser Universum folgern wir daraus, daß es endlich ist, da keine unendlich große Strahlung vorherrscht.

1.2 Kosmologische Einheiten

Auch in der Kosmologie wird häufig die in der Teilchenphysik verwendete Konvention

Einheit	Symbol	Wert
Lichtgeschwindigkeit	c	299 792 458 m/s
Lichtjahr	Lj	$0.3066pc = 0.946 \cdot 10^{16}$ m
Parsec	pc	$3.261Lj = 3.085677 \cdot 10^{16}$ m
Sonnenluminosität	$L_{\odot}$	$3.826 \cdot 10^{26}$ J/s
Sonnenmasse	$M_{\odot}$	$1.989 \cdot 10^{30}$ kg
Radius Sonnenäquator	$R_{\odot}$	$6.960 \cdot 10^8$ m
Hubble-Parameter	H_0	$100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
	h	0.5–0.85
Gravitationskonstante	G	$6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$
Planck'sche Konstante	$\hbar$	$6.582122 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}$
Planck'sche Masse	$M_P = \sqrt{\hbar c/G}$	$1.221 \cdot 10^{19} \text{ GeV}/c^2$
Planck'sche Zeit	$t_P = \sqrt{\hbar G/c^5}$	$5.31 \cdot 10^{-44}$ s
Boltzmann-Konstante	k	$8.617 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$
Krit. Dichte des Univ.	$\rho_C = 3H_0^2/8\pi G$	$2.8 \cdot 10^{11} h^2 \text{ M}_{\odot}/\text{Mpc}^3 =$ $10.6 h^2 \text{ GeV}/\text{m}^3$

Tabelle 1.1: Kosmologische und Astrophysikalische Konstanten

$$\hbar = k = c = 1$$

verwendet. Die Energie $E = mc^2$ wird in GeV, bzw. $E = kT$ in K angegeben.

$$1 \text{ GeV} = 10^{13} \text{ K} = 1.8 \cdot 10^{-24} \text{ g} \quad .$$

Die übliche Längeneinheit in der Kosmologie ist das Lichtjahr

$$1 \text{ Lj} = c \cdot 1 \text{ a} \approx 9.45 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

für kurze Distanzen.

Weitere wichtige kosmologische und astrophysikalische Konstanten sind in Tabelle 1.1 aufgeführt.

1.3 Gesetz von Hubble

In den 20er Jahren maß *Edwin P. Hubble* (1889–1953) die Rotverschiebung von 18 Spiralgalaxien mit bekanntem Abstand, und konnte so auf deren Geschwindigkeit schließen. Die Erwartung für ein statisches Universum war, daß sich die Galaxien mit zufällig verteilten Geschwindigkeiten bewegen. Er entdeckte jedoch, daß deren Fluchtgeschwindigkeiten v linear mit dem Abstand r zunahmen (Abb. 1.1), was auf ein dynamisches Universum hindeutete.

$$v = H_0 r \tag{1.3}$$

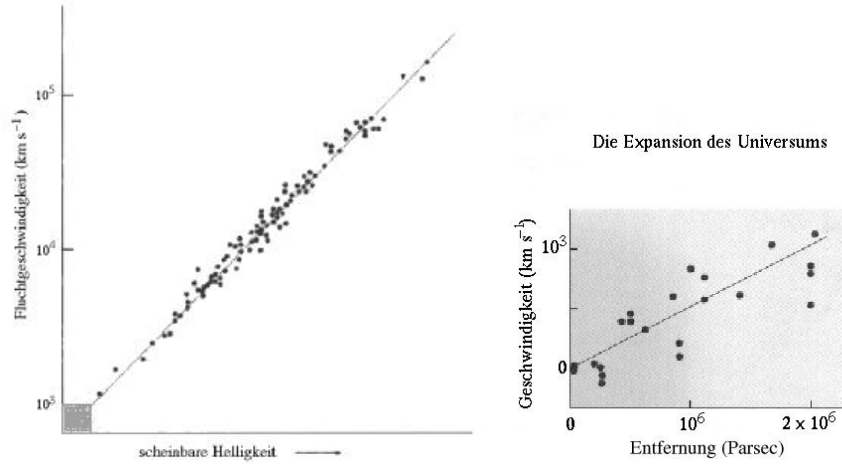


Abbildung 1.1: Hubble-Diagramm und graphische Darstellung des Hubbleschen Gesetzes

Dies ist das *Hubblesche Gesetz* mit dem *Hubble-Parameter* H_0 . Da $H = H(t)$ indiziert man den momentanen (zur Zeit t_0) Wert mit einer 0.

Seit Hubbles Entdeckung wurde dieses Gesetz durch Beobachtungen an 30000 Galaxien verifiziert. Während man anfangs noch Werte um $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ angab, ist man heute bei Werten zwischen 40 und $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ angelangt. Leider hat H_0 also immer noch einen Faktor 2 Unsicherheit. Daher wird zur formalen Beschreibung ein Parameter h mit $0.4 \leq h \leq 1$ eingeführt:

$$H_0 = \frac{100 h \text{ km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \quad . \quad (1.4)$$

Eines der Probleme bei der Messung der Hubble-Expansion ist beispielsweise, wie weit das lokale Feld, d.h. unsere nähere Umgebung (bis um die 100 Mpc), durch die unregelmäßige Verteilung der Galaxien beeinflusst wird. Eine genauere Bestimmung der Entfernungsleiter erhofft man sich von den Beobachtungen mit dem *Hubble-Space-Telescope* (HST), sowie Aufschlüsse über den Wert von H_0 durch Untersuchungen von Gravitationslinsen, Supernovae und dem Sunyaev-Zeldovich-Effekt im Zusammenhang mit der Röntgenemission von Galaxien.

Aus Gl. (1.3) und (1.4) sieht man, daß der Hubble-Parameter die Dimension einer inversen Zeit hat. Die charakteristische Zeitskala für die Expansion des Universums ist deshalb die *Hubble-Zeit*

$$\tau_H \equiv H_0^{-1} = 9.8 h^{-1} \cdot 10^9 a. \quad (1.5)$$

In dieser Zeit τ_H bewegte sich das Licht um den *Hubble-Radius*

$$r_H \equiv \tau_H c = 3000 h^{-1} \text{ Mpc}. \quad (1.6)$$

1.3.1 Relativistische Rotverschiebung

Die von einer Galaxie ausgesendete Strahlung der Wellenlänge λ_{rest} wird durch deren Eigengeschwindigkeit dopplerverschoben (Abb. 1.2). Bewegt sich diese von uns weg (B) sehen wir eine *Rotverschiebung* $\lambda_{obs} > \lambda_{rest}$. Kommt sie auf uns zu (A) mißt man eine *Blauverschiebung*. Am Punkt C stellt man kaum einen Unterschied fest. Ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ der Galaxie groß ($v \geq 0.8c$) muß zur Berechnung der Rotverschiebung z die spezielle Relativitätstheorie angewendet werden.

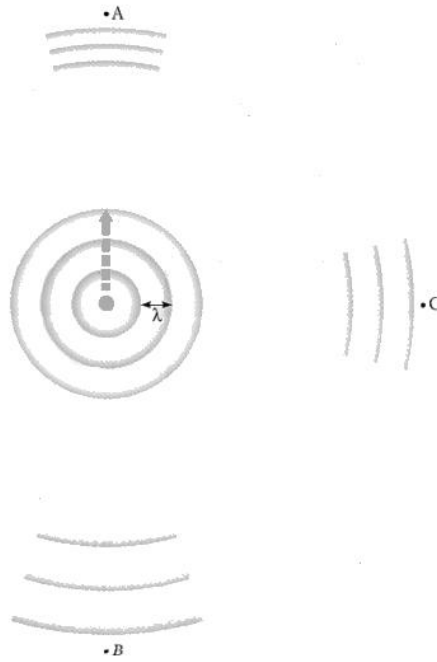


Abbildung 1.2: Diese Skizze dient zur Veranschaulichung der Dopplerverschiebung

Da $d\tau^2$ lorentzinvariant ist, hat es denselben Wert im System einer bewegten Quelle ($d\tau'^2$). Die Periodendauer der Strahlung einer ruhenden Quelle sei $d\tau = dt = 1/\nu_{rest}$ mit $\nu_{rest} = c/\lambda_{rest}$. Bewegt sich diese mit der Geschwindigkeit v in x' -Richtung mißt man auf der Erde eine Periodendauer dt' .

Mit dem Quadrat der vierdimensionalen *Raumzeit-Distanz*

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - d|\mathbf{r}|^2, \quad (1.7)$$

auf das wir im Kapitel 2.1 näher eingehen werden, folgt somit

$$d\tau' = d\tau = dt = \sqrt{dt'^2 - dx'^2/c^2} = \sqrt{1 - (v/c)^2} dt'. \quad (1.8)$$

Die zeitlichen Koordinaten sind also durch die Lorentztransformation

$$dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (1.9)$$

verknüpft. Betrachten wir jetzt die Dopplerverschiebung. Dazu nehmen wir an, daß sich die Strahlungsquelle in Abbildung 1.2 mit der Geschwindigkeit v von uns weg bewegt (B). Im Zeitintervall dt' hat sich die Entfernung Quelle–Beobachter dann von cdt' auf $(c + v)dt'$ vergrößert. Die gesamte gemessene Periodendauer im terrestrischen Labor ist somit

$$\Delta t = \frac{1}{c}(c + v)dt' = (1 + v/c)dt' = \frac{(1 + v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}dt. \quad (1.10)$$

Die Rotverschiebung ist definiert als

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{rest}} - 1. \quad (1.11)$$

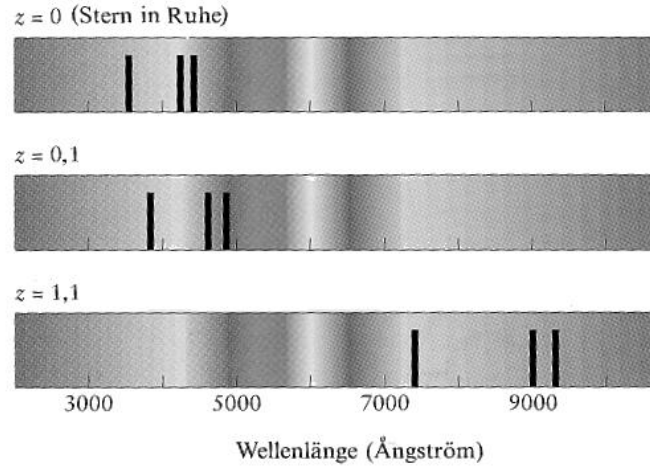


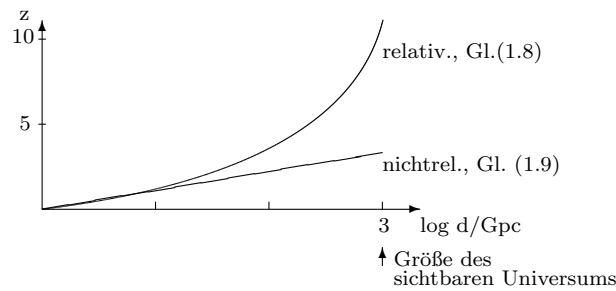
Abbildung 1.3: Das erste Absorptionsspektrum ist das eines ruhenden Sternes. Bei $z=0.1$ bewegt sich der Stern mit etwa zehn Prozent der Lichtgeschwindigkeit vom Beobachter weg. Noch deutlicher zu erkennen ist die Rotverschiebung im dritten Fall. Hier hat der Stern etwa 75 Prozent der Lichtgeschwindigkeit.

Somit ergibt sich für das Verhältnis der Wellenlängen

$$1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{rest}} = \frac{\nu_{rest}}{\nu_{obs}} = \frac{\Delta t}{dt} = \frac{(1 + v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (1.12)$$

Für nicht-relativistische Geschwindigkeiten $v \ll c$ folgt:

$$z \simeq v/c \quad . \quad (1.13)$$

Abbildung 1.4: Rotverschiebung z in Abhängigkeit von r

1.3.2 Abstandsmessungen

Die gesamte Entfernungsskala im Universum ist pyramidenförmig aufgebaut („Entfernungsleiter“). Während trigonometrische Methoden zur Erforschung unserer näheren Umgebung ausreichend sind, benötigt man für größere Entfernungen spektroskopische Methoden.

Ein entscheidendes Bindeglied zwischen geometrischen und spektroskopischen Methoden ist der Hyaden-Sternhaufen in etwa 50 pc Entfernung, da seine Entfernung auf beide Arten ermittelt werden kann.

Als Entfernungseinheit hat sich das *Parsec* (pc ist die Abkürzung für Parallaxensekunde) durchgesetzt. Es ist dies die Entfernung, aus der der Erdbahnradius unter einem Winkel von 1 Bogensekunde erscheint. Für den Winkel π , den Durchmesser der Erdumlaufbahn d und den Abstand zum beobachteten Objekt r gilt $\sin \pi = d/(2r)$.

$$1'' \cong 1 \text{ pc} \equiv 3.26 \text{ Lj}$$

Eine trigonometrische Methode zur Entfernungsbestimmung ist die Paralaxe. Dies ist in der Astronomie die scheinbare Verschiebung eines Objekts, aufgrund der Rotation der Erde um die Sonne, gegenüber sehr viel weiter entfernten Sternen. In Abb. (1.5) ist dies am Beispiel Proxima Centauri, der nächste Stern nach der Sonne, veranschaulicht.

Alle spektroskopischen Methoden beruhen letztendlich auf der Bestimmung einer absoluten Helligkeit M , mit der man mittels der beobachteten scheinbaren Helligkeit m durch das *Entfernungsmodul*

$$M = m - 5 \log\left(\frac{r}{10 \text{ pc}}\right) \quad (1.14)$$

die Entfernung bestimmen kann (interstellare Absorptionseffekte sind hier nicht berücksichtigt). Hat ein massiver Stern etwa 10% seines Wasserstoffs verbrannt, erreicht er eine Zone, in der er pulsationsinstabil werden kann. Eine Klasse dieser Pulsationsinstabilen sind die Cepheiden, benannt nach dem ersten Vertreter dieser Art, δ Cephei. Typische Pulsationsperioden liegen zwischen 2 und 150 Tagen (Abb. 1.6). Schon 1907 stellte *Henrietta S. Leavitt* für Cepheiden eine

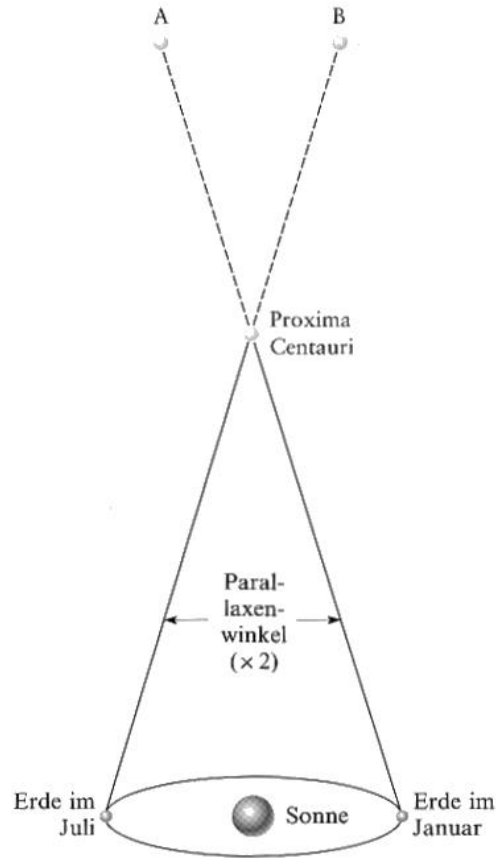


Abbildung 1.5: Die scheinbare Verschiebung eines nahen Sterns von A nach B zwischen Januar und Juli ergibt die doppelte Paralaxe. Beobachtet wird dabei im Abstand von sechs Monaten. Die Entfernung des Sternes ist gleich dem mittleren Radius der Erdbahn dividiert durch den Paralaxenwinkel. Der Stern Proxima Centauri hat eine Paralaxe von von 0.8 Bogensekunden und damit eine Entfernung von 1.3 Parsec oder etwa vier Lichtjahre.

Korrelation zwischen der Pulsationsdauer P und der absoluten Helligkeit im V-Band (550 nm) fest. Heute gilt:

$$M_V = a - b \log P + c(B - V) \quad a, b, c = \text{const.} \quad (1.15)$$

Helle Sterne, d.h. M_V ist stark negativ, bedeuten nach Gl. (1.1) einen kleinen Radius. Diese Sterne haben eine geringe Dichte an der Oberfläche und damit auch eine große Pulsationsperiode. Aus Untersuchungen in unserer Milchstraße kennt man die Abhängigkeit der absoluten Helligkeit von der Pulsationsdauer der veränderlichen Cepheiden relativ genau und kann so durch Beobachtung dieser Veränderlichen in anderen Galaxien auf deren Entfernung schließen.

Desweiteren kann man noch die Eigenschaft nutzen, daß die hellsten Sterne einer

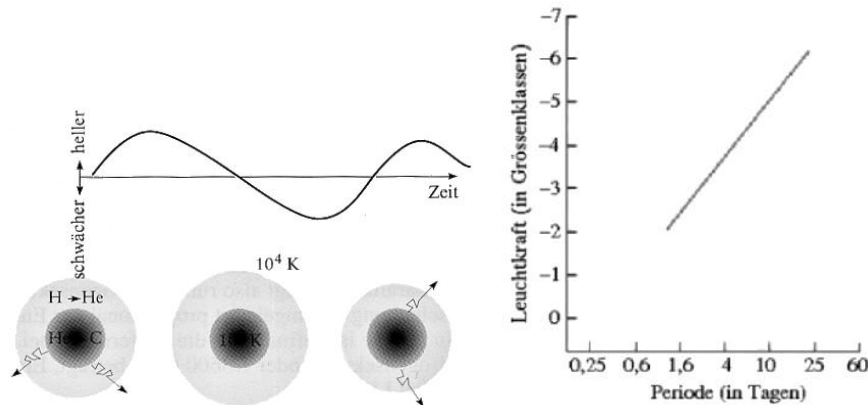


Abbildung 1.6: Das linke Diagramm zeigt die Helligkeitsänderungen eines pulsierenden Sternes. Im rechten Diagramm hat der Astronom Harlow Shapley die gemessenen Leuchtkräfte von Cepheiden gegen ihre Periode aufgetragen und eine Gerade erhalten, die zeigt, daß die Leuchtkraft bei längerperiodischen Veränderlichen höher ist.

Galaxie jeweils ähnliche Leuchtkräfte haben. Damit kann man via Hertzsprung-Russell-Diagramm (Abb. 1.7) deren Leuchtkraft — die durch die Buchstaben OBAFGKMRNS („Oh Be A Fine Girl Kiss Me Right Now Sweetheart“) klassifiziert wird — und somit aus der Helligkeit den Abstand bestimmen. Je kleiner M_V ist, desto heller scheint der Stern. Man erkennt bestimmte Häufungsbereiche. Neben der Hauptreihe (α), auf der die wasserstoffbrennenden Sterne liegen (Sonne $\odot$), gibt es die Gebiete der Roten Riesen (γ) und die der Weißen Zwerge (β), ein Endstadium der Sternentwicklung. Für große Entfernungen müssen diese sekundären Entfernungsindikatoren jedoch zuvor mit den primären „Standardkerzen“ (Cepheiden, LL-Lyrae-Sterne, Supernovae Typ Ia) geeicht werden. Dies führt natürlich dazu, daß sich die Fehler für immer größere Entfernungen aufsummieren. Daher hat die Messung der Hubble-Konstanten noch relativ

Entfernung zur Sonne	8'15"
Entfernung zum nächsten Stern (α Centauri)	1.3 pc
Dicke der Milchstraße	0.3 kpc
Entfernung zum galaktischen Zentrum	8 kpc
Radius der Milchstraße	12.5 kpc
Entfernung zur nächsten Galaxie (LMC)	55 kpc
Entfernung zum Andromeda Nebel (M31)	770 kpc
Größe von Galaxienhaufen	1–5 Mpc
Entf. zum Zentrum des nächsten Superhaufens (in Virgo)	20 Mpc/h
Größe von Superclustern	$\geq 50/h$ Mpc
Hubble Radius	3000/h Mpc

Tabelle 1.2: Kosmologische Abstände und Dimensionen

große Fehler.

Zusammenfassung:

1. *Kleine Abstände:* Parallaxenbestimmung (Jährliche Parallaxe, Tägliche Parallaxe)
2. *Mittlere Abstände:* Primäre Entfernungskindikatoren (Standardkerzen) wie Cepheiden und Supernovae Typ Ia
3. *Große Abstände:* Sekundäre Entfernungskindikatoren wie die Leuchtkraft der hellsten Sterne einer Galaxie

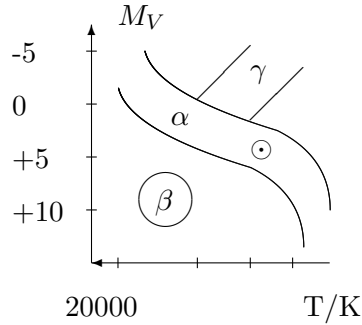


Abbildung 1.7: Schema eines Hertzsprung-Russell-Diagramms, d.h die absolute visuelle Helligkeit $M_V \approx$ Leuchtkraft als Funktion der Temperatur.

1.4 Expansion des Universums

1.4.1 Expansion nach Newton

Die Schlüsselfrage in der Kosmologie ist, ob das Universum als Ganzes ein Gravitationssystem ist, in dem die Expansion eines Tages zum Stillstand kommen wird. Nutzen wir zunächst die Newtonsche Mechanik, um uns dieser Frage anzunähern.

Betrachten wir dazu eine Galaxie der Masse m_G im Abstand r zum Zentrum einer homogenen Massenverteilung der Dichte ρ und Masse $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. Das Gravitationspotential der Galaxie ist

$$U = -\frac{GMm_G}{r} = -\frac{4\pi}{3}Gm_G\rho r^2, \quad (1.16)$$

wobei G die *Gravitationskonstante* ist. Die Galaxie beschleunigt mit der Radialbeschleunigung

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{4\pi}{3}G\rho r \quad (1.17)$$

auf das Gravitationszentrum zu. Es folgt somit das *Newtonsche Gravitationsgesetz*

$$F = -\frac{GMm_G}{r^2} \quad . \quad (1.18)$$

Die negativen Vorzeichen drücken die Anziehung der Gravitation aus. Die kinetische Energie einer Galaxie der (trägen) Masse m , die sich in einem expandierenden Universum mit der Geschwindigkeit v bewegt, ist nach dem Hubbleschen Gesetz

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mH_0^2r^2. \quad (1.19)$$

Wegen der Äquivalenz der schweren und trägen Masse (siehe Kapitel 3.2) gilt $m_G = m$. Die Energie ergibt sich somit zu

$$E = T + U = \frac{1}{2}mH_0^2r^2 - \frac{4\pi}{3}Gm\rho r^2 = mr^2 \left(\frac{1}{2}H_0^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho \right) \quad (1.20)$$

Bei der *kritischen Dichte*

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (1.21)$$

ist $E = 0$, die Expansion kommt zum Erliegen.

Die Variablen r und ρ sind zeitabhängig. Daher werden ihre momentanen Werte mit dem Index 0 ausgedrückt. Der Radius des Universums ist unbekannt. Aus diesem Grund ist es zweckmäßig, einen *Skalenfaktor* S einzuführen.

$$\frac{r(t)}{r_0} = \frac{S(t)}{S_0} \quad \frac{\rho(t)}{\rho_0} = \left(\frac{S_0}{S(t)} \right)^3 \quad (1.22)$$

Aus den Gleichungen (1.17) und (1.22) folgt

$$\frac{\dot{S}}{S} \equiv H_0 = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho} \propto \sqrt{\rho} \propto S(t)^{-\frac{3}{2}}. \quad (1.23)$$

Führen wir die Proportionalitätskonstante $\tilde{k}$ ein und lösen nach $\dot{S}$ auf:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \tilde{k} \cdot S(t)^{-\frac{3}{2}+1} = \tilde{k}S^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad (1.24)$$

Eine Variablenseparation und die Integration bis zur Gegenwart t_0

$$\int_0^{S_0} S^{\frac{1}{2}} dS = \int_0^{t_0} \tilde{k} dt \quad (1.25)$$

führen zu

$$S_0 = kt_0^{2/3}. \quad (1.26)$$

1.4.2 Dichteparameter Ω_0

Wir führen den dimensionslosen *Dichteparameter* ein:

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} \quad . \quad (1.27)$$

Ein Universum mit der Dichte $\rho_0 = \rho_c$, also $\Omega_0 = 1$ wird *kritisch* genannt. Ist $\Omega_0 > 1$ spricht man von einem *geschlossenen*, bei $\Omega_0 < 1$ von einem *offenen* Universum. Abbildung 1.8 veranschaulicht die Expansion.

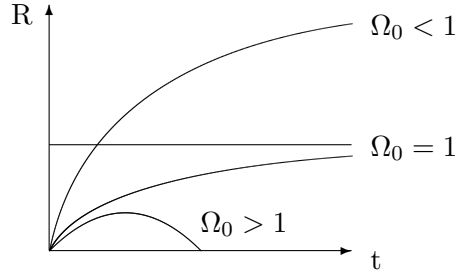


Abbildung 1.8: Einfluß des Dichteparameters Ω_0 auf die Expansion des Universums

1.4.3 Bremsparameter q_0

Führen wir nun den Bremsparameter q_0 ein:

$$q_0 \equiv -\frac{S_0 \ddot{S}_0}{\dot{S}_0^2} = -\frac{\ddot{S}_0}{S_0 H_0^2} \quad . \quad (1.28)$$

Die Rotverschiebung Gl. (1.11) kann dann in erster Näherung ausgedrückt werden durch

$$\begin{aligned} z = \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 = \frac{S_0}{S} - 1 &\approx (1 - H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2)^{-1} - 1 \\ &\approx H_0(t - t_0) + (1 + \frac{1}{2}q_0)H_0^2(t - t_0)^2 \\ &= H_0 r/c + (\frac{1}{2}q_0)(H_0 r/c)^2. \end{aligned}$$

Invertierung ergibt

$$H_0 \frac{r}{c} \approx z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2. \quad (1.29)$$

Der erste Term der rechten Seite ergibt das lineare Hubblesche Gesetz. Der zweite Term drückt die Abweichung von der Linearität in der ersten Ordnung aus. Der Wert $q_0 = 1$ bedeutet keine Abweichung. Aufgrund von Materieanhäufungen beobachtet man selbst in der näheren Umgebung eine Abbremsung der Expansion.

1.4.4 Altersbestimmung des Universums

Die gängigen Weltmodelle verlangen, daß das Weltall seine jetzige Entwicklung aus einem Zustand extremer Konzentration, mit $R \approx 0$ begonnen hat. Von diesem Anfangszustand hat es sich explosionsartig, im sogenannten *Urknall*, auszudehnen begonnen, und diese Expansion dauert auch heute noch an, wenngleich sie inzwischen weitgehend abgebremst ist.

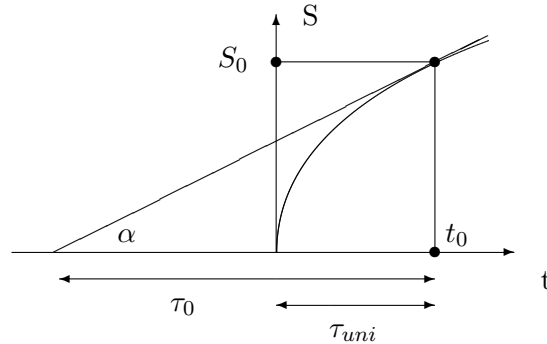


Abbildung 1.9: Lineare Näherung von $S(t)$

In Abbildung 1.9 ist der kosmische Skalenfaktor $S(t)$ über der Zeit t skizziert. Der heutige Wert der Hubble-Konstanten $H(t_0) = H_0$ entspricht der Tangente an $S(t)$ für den jetzigen Zeitpunkt $t = t_0$. Wäre die Expansion unbeschleunigt erfolgt, also $\ddot{S}(t) = 0$, bzw. $S(t) = kt$, so hätte sie wegen $H = \frac{\dot{S}}{S} = \frac{1}{t}$ vor der *Hubble-Zeit* begonnen.

Da aber die Expansion durch die gegenseitige Gravitationsanziehung der Massen abgebremst wurde ($\ddot{S}(t) < 0$), ist tatsächlich τ_0 nur ein oberer Grenzwert für die seit der Expansion vergangene Zeit τ_{uni} . Setzen wir Gl. (1.26) in

$$H_0 = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \quad (1.30)$$

ein, so ergibt sich

$$\tau_0 = \frac{2}{3H_0} \approx 16 \cdot 10^9 \text{ a} \quad . \quad (1.31)$$

Dieser Wert stimmt annähernd mit Altersbestimmungen überein, die man für die ältesten astronomischen Objekte durchgeführt hat.

1.5 Übungen

1. Der Radius der Galaxie ist $3 \cdot 10^{20} \text{ m}$. Wie schnell muß ein Raumschiff fliegen, um sie in an Bord gemessenen 300 Jahren zu durchqueren? Drücken Sie das Ergebnis in $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ aus.

2. Quasistellare Objekte strahlen mit einer Dopplerverschiebung der Größe $z = (\lambda_{obs} - \lambda)/\lambda = 1.95$, wobei λ die von einem Beobachter gemessene Wellenlänge ist. Dieser sei relativ zur Strahlungsquelle in Ruhe. Berechnen Sie mit diesem Ergebnis die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Objekte relativ zu uns bewegen. Wie weit sind sie entfernt, wenn sie dem Hubbleschen Gesetz gehorchen?
3. Ein Beobachter sieht ein Raumschiff aus dem Westen (W) mit der Geschwindigkeit $0.6c$ und eines aus dem Osten (E) mit $0.8c$ auf ihn zukommen. (W) sendet ein Signal mit 10^4 Hz im Inertialsystem des Raumschiffs. Mit welcher Frequenz empfängt dies der Beobachter? Welche Frequenz mißt (E), wenn der Beobachter das Signal instantan und unverändert weiterleitet?
4. Wenn (E) aus voriger Aufgabe das Signal als dopplerverschoben interpretiert, was würde es über die Relativgeschwindigkeit zwischen (W) und (E) schließen können? Zeigen Sie, daß diese $(v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2/c^2)$ beträgt, wenn v_1 und v_2 die von einem außenstehenden beobachteten Geschwindigkeiten sind.
5. Eine Quelle emittiert Blitze der Frequenz 10^{15} Hz. Diese werden an einem Spiegel reflektiert, der sich mit der Geschwindigkeit 10 km/s von der Quelle entfernt. Wie groß ist die Frequenz der an der Quelle beobachteten reflektierten Strahlung?
6. Benutzen Sie Gl. (1.5) um die mittlere freie Weglänge ℓ von Photonen zu bestimmen. Welcher Teil der von den Sternen bis zu einem Abstand von $z = 4.9$ emittierten Photonen erreichen die Erde?

Kapitel 2

Die Metrik der Raumzeit

2.1 Minkowski-Metrik

Newton beschrieb die physikalischen Gesetze in einem *flachen euklidischen Raum*. Er konnte jedoch nicht sagen welches das Inertialsystem ist, das sich in Bezug auf einen absoluten Raum in Ruhe befindet. *Riemann* erkannte schließlich, daß die euklidische Geometrie lediglich eine spezielle Lösung des flachen Raumes ist. *Mach* forderte dann, daß man das Konzept des absoluten Raumes aufgeben müßte, was durch *Einstein* schließlich verwirklicht wurde. Er ersetzte den dreidimensionalen flachen euklidischen Raum durch den vierdimensionalen gekrümmten *Minkowskiraum*.

Der Weg, den ein freies Teilchen in einem dreidimensionalen Raum zurücklegt, kann nach Newton durch die Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ beschrieben werden. Die Zeit t ist hierbei keine Koordinate, sondern ein absoluter Parameter. Die *Geodäte*, die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten, ist eine Gerade.

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.1)$$

In der speziellen Relativitätstheorie wird der Weg eines Teilchens, seine *Weltlinie*, durch die vier Funktionen $x(\tau), y(\tau), z(\tau), t(\tau)$ beschrieben. Die *Absolutzeit* τ ist invariant unter der Lorentz-Transformation. Die Beschreibung erfolgt durch die *Minkowski-Metrik* in kartesischen Koordinaten

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d|\mathbf{r}|^2 \quad (2.2)$$

und in Kugelkoordinaten

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 dt^2 - dR^2 - R^2 d\theta^2 - R^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.3)$$

Die Geodäte ist gegeben durch

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad \frac{d^2 \mathbf{R}}{d\tau^2} = 0 \quad . \quad (2.4)$$

Die Oberfläche einer Kugel mit Radius S ist

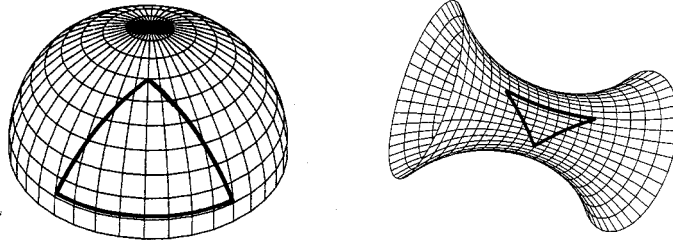


Abbildung 2.1: Die Winkelsumme in einem Dreieck ist bei positiver Krümmung größer als π (linkes Bild), bei negativer Krümmung kleiner (rechtes Bild).

$$S^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.5)$$

Aus (2.1) und (2.5) ist ersichtlich, daß eine dritte Koordinate, beispielsweise z substituiert werden kann:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(xdx + ydy)^2}{S^2 - x^2 - y^2}. \quad (2.6)$$

Diese Metrik beschreibt die Entfernungen auf einer zweidimensionalen Oberfläche im dreidimensionalen Raum. S ist keine dritte Koordinate, sondern eine vom Ort unabhängige Konstante! Für die Geodäten auf dieser Kugel gilt jetzt

$$dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = \begin{pmatrix} d\theta & d\phi \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

mit der Metrik

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt π in einem dreidimensionalen flachen Raum. In einem gekrümmten Raum kann dieser größer (positive Krümmung) oder kleiner (negative Krümmung) sein (Abb. 2.1). *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855) beschrieb die Größe der Krümmung des Raumes durch die sogenannte *Gaußsche Krümmung*

$$K = \frac{1}{R_x(x_0)R_y(y_0)}. \quad (2.9)$$

R ist der Krümmungsradius in x -, bzw. y -Richtung. Betrachten wir nun drei räumliche Koordinaten, so müssen wir von der zweidimensionalen Fläche im dreidimensionalen Raum zur dreidimensionalen *Hyperfläche*

$$S^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \quad (2.10)$$

im vierdimensionalen Euklidischen Raum übergehen. Dieser hat neben den Koordinaten x, y, z eine vierte fiktive Raumkoordinate w . Aus (2.1) und (2.10) folgt

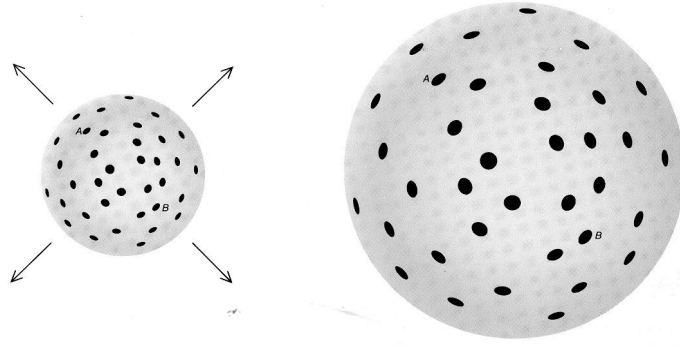


Abbildung 2.2: Das Ballonmodell zeigt anschaulich, wie sich das Universum in alle Richtungen auf die gleiche Weise ausdehnt.

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{S^2 - x^2 - y^2 - z^2} \quad , \quad (2.11)$$

oder in Kugelkoordinaten

$$dl^2 = \frac{S^2 dR^2}{S^2 - R^2} + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad . \quad (2.12)$$

2.2 Robertson-Walker-Metrik

Die Gausssche Krümmung im vierdimensionalen Euklidischen Raum ist

$$K = \frac{k}{R^2} \quad . \quad (2.13)$$

Der *Krümmungsparameter* k kann die Werte +1, 0, -1 annehmen und gibt die Form des Raumes, nämlich sphärisch, flach oder hyperboloidisch an (Abb. 4.2).

Führen wir in Gl. (2.12) die Zeitkoordinate t und den Krümmungsparameter k ein, und ersetzen wir R durch das dimensionslose Verhältnis $\sigma = R/S$, so erhalten wir die 1934 von *Howard Robertson* und *Arthur Walker* hergeleitete Metrik

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 dt^2 - S^2 \left(\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2 d\theta^2 + \sigma^2 \sin^2 \theta d\phi \right) \quad . \quad (2.14)$$

2.2.1 Mitbewegende Koordinaten

Der Krümmungsparameter k kann beliebige Werte annehmen, welche durch eine Skalierung von σ aber immer auf -1, 0, +1 gebracht werden können.

Betrachten wir einen Ballon, der im dreidimensionalen Raum aufgeblasen wird (Abb. 2.2). Die nach dem Aufblasen vergrößerte Entfernung $\mathbf{AB}$ ist proportional zur ursprünglichen. Ein Beobachter in einem beliebigen Punkt auf dem Ballon wird alle anderen Punkte als sich von ihm entfernend sehen. Nach Gl. (2.5) kann dies dadurch ausgedrückt werden, daß der Radius $S = S(t)$ eine Funktion der Zeit ist. Alle Entfernungen skalieren mit $S(t)$ bezüglich einer Startzeit t_0 , zu der der Radius zu $S(t_0) \equiv 1$ definiert wurde. Dies entspricht der Beobachtung, daß sich alle Galaxien von uns wegbewegen. Wenn das Universum also zu einer Zeit homogen und isotrop ist und es der Robertson-Walker-Metrik (2.14) gehorcht, dann wird es immer homogen und isotrop bleiben, da eine Galaxie am Punkt (σ, θ, ϕ) immer dort bleiben wird, weil $S(t)$ unabhängig davon mit der Zeit hinwegskaliert. Wir können daher $d\sigma = d\theta = d\phi = 0$ setzen und erhalten

$$ds^2 = c^2 dt. \quad (2.15)$$

Mann nennt dies *mitbewegendes System*, respektive *mitbewegende Koordinaten*. Erscheint einem Beobachter, der in einem solchen System ruht, das Universum homogen, ist es gleichzeitig auch isotrop. Ein Beobachter mit einer relativen Geschwindigkeit in einem sich mitbewegenden System sieht diese Isotropie nicht mehr.

Integrieren wir die Robertson-Walker-Metrik über dl mit den Grenzen 0 und l ergibt sich

$$l = S(t) \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}}. \quad (2.16)$$

Man sieht also, daß eine Distanz l vom Krümmungsparameter k abhängt. Für den flachen Raum mit $k = 0$ ergibt sich wie erwartet $l = S\sigma$, was nicht beschränkt ist. Ein flaches Universum ist daher immer offen.

Für $k = +1$ ergibt das Integral $l = S \sin^{-1} \sigma$, bzw. $\sigma = \sin(l/S)$.

$$\begin{array}{c|ccc} l & 0 & \rightarrow & \frac{1}{2}\pi S & \rightarrow & \pi S \\ \sigma & 0 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Eine Reise zur Entfernung πS führt also wieder zum Ausgangspunkt zurück, das Universum ist geschlossen.

Aus dem hyperboloidischen Fall $k = -1$ folgt $l = S \sinh^{-1} \sigma$, bzw. $\sigma = \sinh(l/S)$. Da l unbegrenzt größer werden kann, handelt es sich hier wieder um ein offenes Universum.

Die zeitliche Ableitung von Gl. (2.16) ist

$$v = \dot{l} = \dot{S}(t) \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} l, \quad (2.17)$$

da σ zeitlich konstant ist. Die Fluchtgeschwindigkeit ist also proportional zum Abstand. Aus dem Hubbleschen Gesetz folgt

$$H(t) = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \quad . \quad (2.18)$$

Analog zum Hubble-Radius r_H , den ein Lichtstrahl im flachen Raum in der Hubble-Zeit τ_H zurücklegt, bewegt sich das Licht in einem durch die Robertson-Walker-Metrik beschriebenen Raum auf der Geodäte $ds^2 = 0$.

Ist ds^2 in Gl. (2.2) positiv, so ist dies gerade das Quadrat des Eigenzeitintervalls Gl. (3.9), das zwischen den Ereignissen liegt - als das Quadrat der Zeit, die eine Uhr anzeigt, wenn sie in einem Bezugssystem ruht, in dem diese Ereignisse nacheinander am selben Ort stattfinden. Ein solches Raum-Zeit-Intervall heißt *zeitartig*. Falls ds^2 negativ ist entspricht dies dem negativen Quadrat des Eigenabstandes, also des Abstandes, der sich in einem Bezugssystem ergibt, in dem die Ereignisse gleichzeitig an verschiedenen Orten stattfinden. Ein solches Raum-Zeit-Intervall bezeichnet man als *raumartig*. Der Fall $ds^2 = 0$ wurde oben schon angesprochen. Das Intervall ist *lichtartig*.

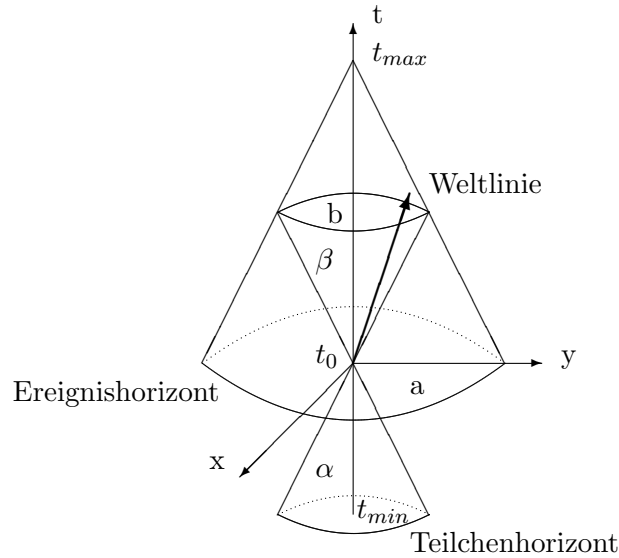


Abbildung 2.3: Lichtkegel in der Raumzeit. Die Bahn eines Körpers der sich in der Raumzeit bewegt, wird *Weltlinie* genannt, welche sich immer innerhalb des Zukunft-Lichtkegels (β) befindet. Alle Punkte der Weltlinie sind zeitartig (b). Es können keine raumartigen (a) Signale empfangen werden. Der Vergangenheits-Lichtkegel (α) wird durch den Teilchenhorizont bei t_{min} begrenzt. Ein Ereignis auf dem Ereignishorizont, welcher den gegenwärtigen Raum begrenzt, kann erst zu einer zukünftigen Zeit t_{max} gesehen werden.

Definieren wir nun den *Teilchenhorizont* σ_p (Abb. 2.3) als die größtmögliche mitbewegende Entfernung, aus welcher uns ein zur Zeit $t = 0$ emittierter Lichtstrahl erreichen kann. Diese gibt die Größe des kausal in Kontakt stehenden

Teils des Universums an, der von einem Beobachter zur Zeit t gesehen werden kann. Mit $\sigma = 0$ und t_0 folgt aus der Robertson-Walker-Metrik

$$\int_0^{\sigma_p} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}} = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{S(t)} \equiv \chi. \quad (2.19)$$

Für σ_p ergibt sich somit

$$\sigma_p = \begin{cases} \sin \chi & : k = +1 \\ \chi & : k = 0 \\ \sinh \chi & : k = -1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Falls $k \geq 0$, ist der Abstand zum Teilchenhorizont zur Zeit t

$$r_p = S(t)\sigma_p. \quad (2.21)$$

Bei $k = 0$ und $S(t) = S$ entspricht r_p dann dem Hubble-Radius $r_H = c/H_0$. Bei einem offenen Universum mit $k = -1$ gilt diese Interpretation nicht mehr.

Analog kann der *Ereignishorizont* σ_e als am weitesten entferntes Ereignis definiert werden. Diese Weltlinie muß zu einer endlichen zukünftigen Zeit t_{max} unsere Weltlinie schneiden können.

$$\int_0^{\sigma_e} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}} = c \int_{t_0}^{t_{max}} \frac{dt}{S(t)} \quad (2.22)$$

2.3 Das Prinzip der Kovarianz

Üblicherweise schreibt man die Robertson-Walker-Metrik in der Form

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.23)$$

wobei nach der Einsteinschen Summenkonvention über doppelt vorkommende Indizes aufsummiert wird. Griechische Buchstaben werden i.A. bei vier Dimensionen $x^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$, und römische bei drei Dimensionen $x^i, i = 1, 2, 3$ benutzt. Die $g_{\mu\nu}$ sind die Komponenten einer 4×4 -Matrix, dem sogenannten *Metrischen Tensor*. Ein d -dimensionaler Tensor vom Rang r hat d^r Komponenten. $r = 1$ entspricht also einem Vektor, und $r = 0$ einem Skalar. Ein Beispiel für einen Tensor vom Rang 2 ist das *Kronecker-Delta* $\delta_{\mu\nu}$.

Da orthogonale Koordinatensysteme immer diagonale metrische Tensoren besitzen, folgt für die Elemente der Robertson-Walker-Metrik (2.14)

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -\frac{S^2}{1-k\sigma^2}, \quad g_{22} = -S^2\sigma^2, \quad g_{33} = -S^2\sigma^2 \sin^2 \theta \quad . \quad (2.24)$$

Analog gilt für die Minkowski-Metrik (2.2)

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{jj} = -1 \quad j = 1, 2, 3 \quad . \quad (2.25)$$

Es sei $c \equiv 1$. Die Nullkomponente des Viererimpulses $P = (E, \mathbf{p})$ ist die Energie E , weshalb das Skalarprodukt

$$P^2 = \eta_{\mu\nu} P_\mu P_\nu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \quad p^2 \equiv |\mathbf{p}|^2 \quad (2.26)$$

invariant unter Raumtransformation ist, d.h. der Term mc^2 ist in jedem Inertialsystem gleich. Für ein Teilchen in Ruhe, also $\mathbf{p} = 0$, folgt:

$$E = mc^2 \quad . \quad (2.27)$$

Das zweite Newtonsche Gesetz in nicht relativistischer Form $F = ma = m\dot{v} = \dot{p}$ ist zwar invariant in Inertialsystemen, nicht jedoch in beschleunigten Bezugssystemen. Das Ziel ist es, Größen zu finden die in jedem beliebigen Bezugssystem die gleiche Gestalt haben. Diese Forderung erfüllen Tensoren und damit auch Vektoren. Physikalische Gesetze, die in allen Bezugssystemen gleiche Gestalt haben, nennt man kovariant.

2.4 Übungen

1. Beweisen Sie Newtons Theorem, daß die Gravitationskraft im Abstand R einer kugelförmigen Materieverteilung genau der Kraft entspricht, welche die Masse innerhalb einer Kugel mit dem Radius R ausüben würde, wenn sie in einem Punkt im Zentrum vereinigt wäre. Zeigen Sie auch, daß wenn die kugelförmige Materieverteilung größer wird als R , die Kraft, die von der Materie außerhalb R ausgeht, verschwindet.
2. Nehmen Sie an, daß die Expansion des Universums mit $g = 1/2$ konstant abnimmt. Es werden zwei Galaxien in entgegengesetzter Richtung beobachtet. Beide befinden sich im Abstand r . Wie groß ist der maximale Abstand, so daß sie gerade noch in kausalem Kontakt sind? Geben Sie das Ergebnis in Bruchteilen des Abstandes zu r_p an. Wie groß ist der Teilchenhorizont des Beobachters?
3. Zeigen Sie, daß der Hubble-Abstand $r_H = c/H$ mit der Radialgeschwindigkeit

$$\dot{r}_H = c(1 + q) \quad (2.28)$$

abnimmt. Welcher Funktion der Zeit sollte der Skalenfaktor $S(t)$ entsprechen, damit $r_H(t)$ konstant bleibt?

4. Drücken Sie den Hubble-Parameter $H(t)$ als Funktion des Bremsparameters q_0 und der Zeit t aus.
5. Befindet sich die Kugelschale, die durch den Hubble-Radius r_H definiert wird innerhalb oder außerhalb des Teilchenhorizontes?

6. Die theoretische Auflösung eines Teleskops ist gegeben durch

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad . \quad (2.29)$$

Nehmen Sie die Wellenlänge zu $\lambda = 8 \times 10^{-7} \text{ m}$ und den Spiegeldurchmesser zu $D = 5 \text{ m}$ an. Bestimmen Sie die größte Entfernung zu einem Stern, der noch mittels der Parallaxenmethode vermessen werden kann.

7. Berechnen Sie, ob die folgenden Raumzeit-Intervalle grundsätzlich raumartiger, zeitartiger oder lichtartiger Natur sind.

- (1,3,0,0)
- (3,3,0,0)
- (3,-3,0,0)
- (0,3,0,0)
- (3,1,0,0)

8. Die Supernova 1987A in der 170000 Lj entfernten Großen Magellanschen Wolke erzeugte einen Ausbruch von Antineutrinos $\bar{\nu}_e$, die mittels terrestrischer Detektoren beobachtet wurden. Sollten diese massiv gewesen sein, so würde ihre Geschwindigkeit von ihrer Masse und ihrer Energie abhängen. Geben sie das Zeitintervall zwischen instantan angenommener Emission und Detektion an. Zeigen Sie, daß dieses im Grenzfall verschwindender Massen gegen Null geht. Welche Information kann aus der Beobachtung, daß die Energien der Antineutrinos zwischen 7 und 11 MeV gelegen haben, sowie daß das Zeitintervall der Detektion 7 s lang war, über die Masse der Antineutrinos gewonnen werden?

9. Berechnen Sie die gravitative Rotverschiebung für die 769.9 nm-Linie des Potassiums, welche von der Sonnenoberfläche emittiert wird.

10. Wie lautet die Metrik für einen isotropen und homogenen dreidimensionalen Raum der Krümmung -10^{-2} m^{-2} ? Wie groß wäre die Oberfläche einer Kugelschale im Abstand 10 m vom Zentrum?

11. Gehen Sie von einem geschlossenen Universum mit Robertson-Walker-Metrik und $S = at$ aus. Eine Galaxie werde gleichzeitig aus gegenüberliegenden Richtungen gesehen. Wann fand, bezüglich der heutigen mitbewegenden Zeit, die Emission statt? Wie lange würde ein zur Zeit $t = t_0$ emittierter Lichtstrahl brauchen, um das Universum zu durchqueren?

12. Der euklidische Raum wird beschrieben durch

$$ds^2 = S^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad . \quad (2.30)$$

Berechnen Sie dafür Γ_{kl}^i , mit $i, k, l = 1, 2$ und $\theta = x^1, \phi = x^2$.

Kapitel 3

Gravitation

3.1 Scheinkraft

Einstein stellte eine These auf, wonach sich Gravitationskräfte nicht von Kräften, die Körper in einem beschleunigten Bezugssystem erfahren, unterscheiden sollten. Bei einer wahren Kraft hängt die durch sie hervorgerufene Beschleunigung gewöhnlich von den spezifischen physikalischen Eigenschaften des jeweiligen Körpers ab. Beispielsweise ruft ein elektrisches Feld je nach Ladung eines Körpers eine größere bzw. kleinere Kraft hervor. Scheinkräfte hingegen hängen nur von Ort und Geschwindigkeit eines Körpers ab. Damit ist die Gravitationskraft also eine Scheinkraft.

3.2 Das Prinzip der Äquivalenz

Einstein suchte nach einem Gravitationsgesetz, welches die drei Konflikte zwischen Newtons Gravitationsgesetz (Gl. 1.18)

- beinhaltet lediglich skalare Größen, und ist somit nicht invariant,
- es enthält keine Zeitabhängigkeiten, so daß Gravitationseffekte auch jenseits des Universums eine Rolle spielen müßten,
- die *gravitative Masse* m_G ist nicht mit der *trägen Masse* m in $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ verknüpft,

und der speziellen Relativitätstheorie löst.

Betrachten wir in einem Gedankenexperiment ein fensterloses Raumschiff, das noch auf der Startrampe steht. Lassen wir in diesem einen Gegenstand fallen, so wird dieser mit der Erdbeschleunigung g beschleunigt. Im zweiten Schritt soll sich unser Raumschiff an einem absolut kräftefreien Punkt (z.B. am *Lagrange-Punkt* zwischen Erde und Sonne) befinden. Werden jetzt die Raketenmotoren mit entsprechender Leistung eingeschaltet, so erfährt der Gegenstand im Raumschiff wiederum eine Beschleunigung g . Die Besatzung des Raumschiffes wird keinen Unterschied der Beschleunigungskräfte feststellen können. Dies ist das

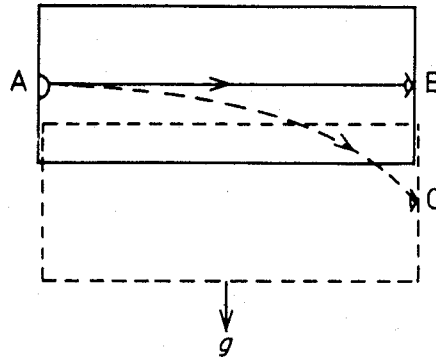


Abbildung 3.1: Eine Lichtquelle in A strahlt horizontal auf den Punkt B. Ein außenstehender Beobachter sieht das Raumschiff mit der Beschleunigung g . Der Lichtstrahl folgt für ihn also der Kurve C.

Prinzip der Äquivalenz. Die Astronauten könnten also behaupten, auch im ersten Fall existierte keine Gravitation, sondern das Raumschiff hat sich beschleunigt von der Erde wegbewegt. Würde jedoch zur gleichen Zeit genau auf der gegenüberliegenden Seite der Erde ebenfalls ein Raumschiff starten, so würden diese Astronauten eine Beschleunigung in entgegengesetzter Richtung messen. Der Grund dafür ist, daß das Prinzip der Äquivalenz nur *lokal* in einem Raumsegment gilt, in dem der gekrümmte Raum durch einen flachen Minkowski-Raum angenähert werden kann.

Lassen wir unser Raumschiff nun so beschleunigt auf die Erde zufliegen, daß darin Schwerelosigkeit herrscht. Ein Lichtstrahl im Raumschiff wird sich geradlinig ausbreiten (Abb. 3.1), und die Astronauten werden daraus schließen, daß sie sich in einem flachen Raum befinden. Für einen außenstehenden Beobachter bewegt sich das Raumschiff jedoch beschleunigt im Gravitationsfeld der Erde, und der Lichtstrahl wird für ihn eine Parabelbahn zurücklegen. Er wird daraus schließen, daß entweder das Licht Gravitation verspürt, also eine Masse hat, beziehungsweise, da es sich ja immer auf einer Geodäte ausbreitet, der Raum gekrümmt ist.

Die Probleme des Newtonschen Gravitationsgesetzes führen zur Allgemeinen Relativitätstheorie:

$$\begin{aligned} \text{ART} &= \text{Newton} + \text{Krümmung} \\ &\quad + \text{Druck} \\ &\quad + \text{Relativitätstheorie } E = mc^2 \end{aligned}$$

Wir werden später die grundlegenden Experimente zur ART diskutiert.

3.3 Licht im Gravitationsfeld

Nach der klassischen Physik und der speziellen Relativitätstheorie ist die Frequenz einer Welle als Kehrwert des Zeitintervalls zwischen aufeinanderfolgenden Wellenbergen gegeben - als Wert, den ein ruhender Beobachter im jeweils betrachteten Bezugssystem mißt. In einem Gravitationsfeld (oder in einem beschleunigten Bezugssystem) kann diese Beziehung jedoch nicht mehr gelten. Die Wellenberge bei Lichtwellen, die sich in einem Gravitationsfeld in z -Richtung ausbreiten, folgen immer in gleichen Zeitabständen, aber ihre Frequenz variiert mit der Höhe.

Wir können nun das Zeitintervall zwischen den Wellenbergen von Licht, das bei einem speziellen atomaren Übergang emittiert wird, als lokales Zeitmaß betrachten. Mit anderen Worten: Wir vereinbaren, daß die Frequenz des Lichtes, das bei einem bestimmten atomaren Übergang emittiert wird, unabhängig vom örtlichen Gravitationspotential festgelegt werden soll. Diese Bedingung kann für eine idealisierte Uhr (Frequenzstandard) erfüllt werden; zum Beispiel würde sich ein winziges Pendel als Uhr eignen. Wegen des Äquivalenzprinzips laufen Uhren, die im feldfreien Raum gleich schnell gehen, auch in einem Gravitationsfeld im gleichen Takt, sofern sie sich an Orten mit gleichem Gravitationspotential befinden. Da die Frequenz eines fallenden Photons zunimmt, sollten identische Uhren allerdings bei verschiedenen Gravitationspotentialen nicht mehr gleich schnell gehen. Nur so läßt sich begründen, daß das Zeitintervall zwischen aufeinanderfolgenden Bergen einer monochromatischen Lichtwelle nicht von der Höhe im Gravitationsfeld abhängt, obwohl die Frequenz nachweislich mit der Höhe variiert (etwa im Versuch von Pound und Rebka).

Wie sich das Zeitmaß, das durch einen speziellen atomaren Übergang definiert ist, mit dem Gravitationspotential Φ ändert, ergibt sich aus

$$E_\nu = h\nu \quad E'_\nu = E_\nu - E_{pot} = h\nu - mgH \quad (3.1)$$

mit $E = mc^2$ folgt:

$$\Delta E = E'_\nu - E_\nu = -\frac{gHh\nu}{c^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gH}{c^2} \quad (3.3)$$

Somit gilt:

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta m}{m} \quad . \quad (3.4)$$

Seien Δt_1 und Δt_2 die Intervalle zwischen aufeinanderfolgenden Wellenbergen bei Licht vorgegebener (lokaler) Frequenz, das in den Höhen z_1 und z_2 emittiert wird. Wenn das bei z_2 emittierte Licht bei z_1 ankommt, beträgt das Zeitintervall zwischen aufeinanderfolgenden Wellenbergen dort nach wie vor Δt_2 . Ein

Beobachter auf der Höhe z_1 wird jedoch eine Frequenzverschiebung zwischen dem bei z_1 und z_2 emittierten Licht feststellen:

$$\frac{\nu(z_2 \rightarrow z_1) - \nu(z_1 \rightarrow z_1)}{\nu(z_1 \rightarrow z_1)} = \Phi(z_2) - \Phi(z_1). \quad (3.5)$$

Hier bezeichnet $\nu(z_2 \rightarrow z_1)$ die Frequenz des in der Höhe z_1 emittierten und absorbierten Lichtes.

Beide Frequenzen sind mit den „Standardzeiten“ Δt_1 und Δt_2 wie folgt verknüpft:

$$\nu(z_2 \rightarrow z_1) = \frac{1}{\Delta t_2}, \quad \nu(z_1 \rightarrow z_1) = \frac{1}{\Delta t_1}. \quad (3.6)$$

Wenn wir die Gleichungen (3.5) und (3.6) kombinieren und statt $\Phi(z_i)$ nun Φ_i schreiben, ergibt sich:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 1 + \Phi_2 - \Phi_1 \simeq \frac{1 + \Phi_2}{1 + \Phi_1}. \quad (3.7)$$

Das Gravitationspotential Φ ist dabei so definiert, daß es Null wird, wenn kein Gravitationsfeld vorhanden ist. Nehmen wir an, in einem frei fallenden Bezugssystem, in dem das emittierende Atom momentan ruht, beträgt das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wellenbergen $\Delta\tau$. Dann können wir nach dem Äquivalenzprinzip annehmen, daß das gleiche Atom beim Gravitationspotential Φ ruht und Licht emittiert, dessen Wellenberge in Bezug auf dieses System im Abstand Δt folgen. Dann ergibt sich aus Gleichung (3.7):

$$\Delta\tau = (1 + \Phi)\Delta t. \quad (3.8)$$

Bislang haben wir nur ruhende Uhren in einem statischen Gravitationsfeld behandelt; aber es ist klar, wie sich diese Beschreibung für bewegte Uhren verallgemeinern ließe. In Gleichung (3.8) steht $\Delta\tau$ für das Intervall zwischen Zeitmarken (Emission von aufeinanderfolgenden Wellenbergen durch eine Atomuhr), das man in einem lokal gravitationsfreien (frei fallenden) Bezugssystem beobachtet. Die Eigenzeit ist die Zeit, die eine Uhr im ruhenden Bezugssystem mißt. Sie erfüllt die Beziehung

$$d\tau^2 = dt^2 - dl^2, \quad dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3.9)$$

wobei dt, dx, dy, dz infinitesimale Koordinatenänderungen für beliebig nahe Ereignisse in der Geschichte der bewegten Uhr wiedergeben. Eine naheliegende Verallgemeinerung von (3.8) wäre

$$d\tau^2 = [1 + 2\Phi(z)]dt^2 - dl^2, \quad (3.10)$$

da man näherungsweise

$$(1 + \Phi)^2 \simeq 1 + 2\Phi = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad (3.11)$$

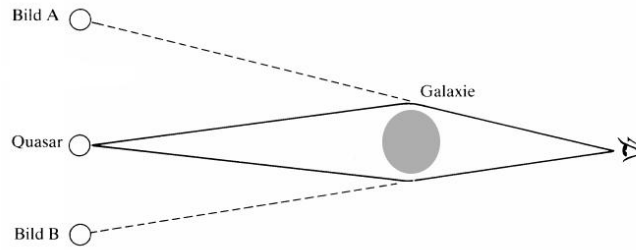


Abbildung 3.2: Eine massereiche Galaxie kann als Gravitationslinse wirken. Dadurch entstehen, wie an dem Strahlengang zu sehen ist, zwei Bilder ein und desselben Objektes.

setzen kann. Aus dieser Gleichung folgen einige interessante Voraussagen zum Einfluß von Gravitationsfeldern auf Licht. Das Eigenzeitintervall zwischen Ereignissen in der Geschichte eines Photons beispielsweise ist Null. Da die Grösse $d\tau$ in Gleichung (3.10) ebenfalls die Bedeutung einer Eigenzeit hat, ergibt sich mit $d\tau = 0$ eine Beziehung, die Zeit- und Raumintervalle bei Photonen im Gravitationsfeld verknüpft:

$$dl^2 = (1 + 2\Phi)dt^2 \quad \frac{dl}{dt} \equiv c = 1 + \Phi(z). \quad (3.12)$$

Da das Gravitationspotential einem negativen Energiebeitrag entspricht, ist $\Phi \leq 0$; das heißt, Photonen sind in einem Gravitationsfeld langsamer als im Vakuum.

Eine weitere besonders spektakuläre Bestätigung für die Lichtbeugung im Gravitationsfeld war die Entdeckung einer Gravitationslinse (Abb. 3.2): Denis Walsh entdeckte 1979 zwei Quasare, deren optische Bilder nur sechs Bogensekunden auseinanderliegen und deren Spektren sich als identisch herausstellten - wie Walsh in einer gemeinsamen Untersuchung mit Robert Carswell und Ray Weyman nachwies. Die drei Wissenschaftler vermuteten daher, daß die „Zwillingsquasare“ nur zwei optische Bilder von ein und demselben physikalischen Objekt sind, dessen Licht durch eine in Blickrichtung vorgelagerte massereiche Galaxie abgelenkt wird. Diese Galaxie sollte also wie eine Gravitationslinse wirken.

Allerdings war auf den Aufnahmen keine solche Galaxie zu erkennen. Alan N. Stockton erklärte das damit, daß ihr Licht durch eines der Quasarbilder überstrahlt wird. Deshalb subtrahierte er elektronisch das „blauere“ Quasarbild A von dem „röteren“ Bild B, und tatsächlich wurde nun die vermutete massereiche Galaxie sichtbar.

3.4 Die Krümmung der Raumzeit

An dem Eigenzeitintervall in Gl. (3.8) ist ersichtlich, daß ein Gravitationsfeld die Raumzeit krümmt. Bei verschwindendem Gravitationsfeld gilt die Minkowskische Gleichung für das Eigenzeitintervall:

$$d\tau^2 = dt^2 - dl^2 \quad (3.13)$$

Bis auf das Minuszeichen entspricht das dem Satz des Pythagoras, angewendet auf den Abstand zweier Punkte im vierdimensionalen Raum. Das Minuszeichen spiegelt den Unterschied zwischen zeitartigen, raumartigen und lichtartigen Intervallen, die in allen unbeschleunigten Bezussystemen erhalten bleiben, wieder. Wir wollen auf den Begriff der Geraden, die sowohl im euklidischen Raum als auch im Minkowski Raum einer geradlinigen Funktionskurve entspricht, näher eingehen. Vergleichen wir dazu den zweidimensionalen euklidischen Raum mit dem zweidimensionalen Minkowski-Raum. Im euklidischen Raum ist eine Gerade als die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten definiert. Diese Definition läßt sich auf jeden Raum anwenden, sofern ein Abstandsmaß festgelegt ist. Auf einer Kugeloberfläche beispielsweise ist eine Gerade nach obiger Definition ein Großkreis. Im Minkowski-Raum versagt die euklidische Abstandsdefinition; denn wir können für zwei Ereignisse immer Verbindungslinie konstruieren, deren Länge Null wird (Abb. 3.3).

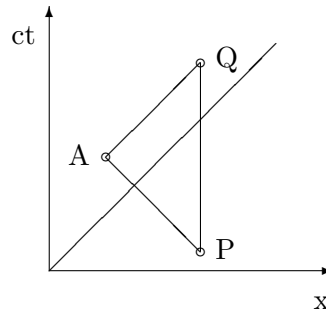


Abbildung 3.3: Im Minkowski-Raum lassen sich zwei beliebige Ereignisse P und Q durch einen Weg verbinden, dessen Eigenlänge Null wird. Der Weg PAQ setzt sich einfach aus Abschnitten von Photonenbahnen zusammen.

Zeitartige Geraden sind Bahnen von freien Teilchen. Sie haben Gleichungen der Form $x - x_0 = V(t - t_0)$ mit $V < 1$. Wie aus Abb. 3.3 hervorgeht, ist das Eigenzeitintervall zwischen zwei Ereignissen (P) und (Q) entlang ihrer Verbindungsgeraden am größten.

Lassen wir nun ein Gravitationsfeld in z-Richtung zu. Dann ergibt sich aus Gl. (3.10) die Eigenzeit zu

$$d\tau^2 = [1 + 2\Phi(z)]dt^2 - dz^2 \quad (3.14)$$

Diese Beziehung ähnelt der Gleichung $dl^2 = \sin^2 \Theta d\lambda^2 + d\Theta^2$, die den Abstand zweier benachbarter Punkte auf einer Kugeloberfläche wiedergibt.

Die Oberfläche einer Kugel ist zwar nicht global, jedoch lokal euklidisch. Dies läßt sich ausnutzen, um auf der Kugeloberfläche eine Gerade zu konstruieren. Dazu legen wir durch einen Punkt ein kurzes Geradenstück. Innerhalb der Umgebung dieses Punktes, in der der Raum als euklidisch betrachtet werden kann, wählen wir einen neuen Punkt auf der Geraden. Durch diesen legen wir erneut ein Geradenstück, in der gleichen Richtung wie das zuverige. Durch Wiederholen dieser Schritte gelangen wir letzten Endes wieder zum Ausgangspunkt. Lokale Abweichungen von der Geradlinigkeit lassen sich dadurch verringern, indem die Punktabstände infinitesimal klein gewählt werden. Die so konstruierte Gerade entspricht einem Großkreis.

Analog dazu läßt sich das Eigenzeitintervall zwischen benachbarten Ereignissen im Gravitationsfeld als Gerade in der gekrümmten Raum-Zeit konstruieren. So wie wir die Geometrie der Kugeloberfläche lokal als euklidisch betrachtet haben, können wir die Raum-Zeit lokal mit Hilfe der Minkowski-Koordinaten beschreiben. Lokal gibt es keine Fallbeschleunigung und gerade verlaufende zeitartige Bahnkurven repräsentieren die Bewegung freier Teilchen. In der gekrümmten Raum-Zeit ergibt sich die Bahnkurve eines Teilchens in einem Gravitationsfeld Φ aus den vielen lokalen Abschnitten, durch die sich eine zeitartige Gerade näherungsweise darstellen läßt.

Wir haben die Bewegung von Teilchen in einem Gravitationsfeld beschrieben, ohne auf die Begriffe Kraft oder träge Masse zurückzugreifen. Zwar nur für ein statisches Gravitationsfeld in z-Richtung, das spezielle Gravitationspotential in Gl. (3.14) läßt sich aber durch das allgemeine $\Phi(x, y, z, t)$ ersetzen. Allgemein gilt, daß Teilchen, die sich frei in einem Gravitationsfeld bewegen, Geraden der gekrümmten Raum-Zeit folgen.

3.5 Einsteins Feldgleichungen

Wenn die Struktur der Raum-Zeit der Gleichung

$$d\tau^2 = [1 + 2\Phi(z)]dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.15)$$

entspräche, wäre der Raum euklidisch. Das folgt aus der Tatsache, daß der Eigenabstand dl zwischen benachbarten raumartigen Ereignissen durch $dl^2 = -d\tau^2$ gegeben ist. Entsprechend dem Satz des Pythagoras müßte bei gleichzeitigen Ereignissen gelten:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.16)$$

Einstein kam durch ein Gedankenexperiment zu dem Schluß, daß diese Formel falsch sein muß: Auf einer rotierenden Scheibe erfährt ein Körper in Bezug auf ein rotierendes Bezugssystem eine nach außen gerichtete Beschleunigung vom Betrag $\omega^2 r$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit und r der Abstand des Körpers von der Rotationsachse ist. Die Wirkung entspricht einer Fallbeschleunigung $g = \omega^2 r$. Desweiteren denken wir uns zwei identische Uhren. Eine in der Mitte, die andere am Rand der Scheibe. Wenn die Scheibe frei fällt, geht die Uhr in der Mitte so, wie es die Spezielle Relativitätstheorie vorhersagt, aber die Uhr am Rand läuft langsamer. Eine beschleunigte Uhr geht zu jedem Zeitpunkt genauso schnell wie eine identische Uhr, die in einem fallenden Bezugssystem (mit gleicher Beschleunigung) zum betrachteten Zeitpunkt ruht. In unserem Beispiel rotiert das System der Uhr am Scheibenrand relativ zu dem frei fallenden Mittelpunkt mit der Geschwindigkeit $v = \omega r$.

3.6 Experimente

3.6.1 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c

Michelson-Morley: In einem in $\mathbf{x}$ -Richtung bewegten Michelson-Interferometer müssen die Lichtgeschwindigkeiten $c_{\mathbf{x}}$ und $c_{\mathbf{y}}$ unterschiedlich sein falls ein absoluter Raum (*Äther*) existiert. Tatsächlich ist c jedoch unabhängig vom Inertialsystem ($\dot{s} = 0$).

3.6.2 Licht empfindet Gravitation

In einem Laborversuch wiesen R. V. Pound und G. A. Rebka jr. 1960 die Gravitationsrotverschiebung auf der Erde nach. Sie verwendeten als Quelle ^{57}Fe , das Photonen eines sehr schmalen Frequenzbereiches emittiert. Ein Absorber, der exakt auf die monochromatische Strahlung abgestimmt war, befand sich in einer Höhe H von 22,5 Metern über der Quelle. Die Strahlung, die den Absorber erreichte, war in der Frequenz um einen Betrag $\Delta\nu/\nu = gH/c^2$ verschoben. In Zahlen: $2,5 \times 10^{-15}$. Die gemessene Absorptionsrate sank nachweisbar gegenüber der Rate ab, die man ohne Gravitationsrotverschiebung beobachten würde. Mit Hilfe des Dopplereffektes ließ sich die gravitative Rotverschiebung bestimmen: Quelle und Absorber wurden so gegeneinander bewegt, daß die Absorptionsrate auf ihren normalen Wert im feldfreien Raum anstieg und die Dopplerverschiebung die Gravitationsrotverschiebung kompensierte. Aus den Bewegungen von Quelle und Absorber und der Strahlungsfrequenz ergab sich eine Doppler- und mithin Gravitationsrotverschiebung, die um weniger als zehn Prozent von den Voraussagen der Einsteinschen Theorie abwich. Inzwischen wurde der Fehler auf ein Prozent reduziert.

Das Photon empfindet also Gravitation. Setzen wir die Energieänderung (3.2) der potentiellen Energie des Gravitationsfeldes gleich, erhalten wir eine Photonenmasse von

$$m_{\gamma} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (3.17)$$

3.6.3 Träge Masse $m_T \equiv$ Schwere Masse m_S

Eötvös: Es wurde mittels einer Gravitationswaage

$$\Delta E = -\frac{GMm_S}{R} + \frac{1}{2}m_T v^2 \quad (3.18)$$

gemessen. Die Äquivalenz

$$m_T = m_S \quad (3.19)$$

wurde innerhalb einer Genauigkeit von

$$\frac{\Delta m}{m} = 10^{-10}$$

bestätigt.

3.7 Übungen

1. Schätzen Sie die gravitative Rotverschiebung von Licht ab, das einer Galaxie der Masse $10^9 M_\odot$ entkommt. Das Licht wurde von einem Stern emittiert, der sich in einer Entfernung von 1 kpc vom Galaxienzentrum befindet.

Kapitel 4

Kosmologische Modelle

4.1 Schwarzschild-Radius

Betrachten wir vereinfachend einen einzelnen Stern der Masse M in einem sonst unendlich leeren Raum. Dieser soll kugelsymmetrisch sein. Damit sind alle Größen von θ und ϕ unabhängig. Ebenfalls soll das ganze System statisch sein, das heißt, wir können die Zeit t vernachlässigen. Dies erfordert folgende Metrik:

$$ds^2 = B(r)c^2dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad . \quad (4.1)$$

Da in großer Entfernung der Raum flach ist, gilt die Grenzbedingung $A = B = 1$ für $r \rightarrow \infty$. Aus Gl. (3.11) folgt

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2r} \quad . \quad (4.2)$$

Die Herleitung von $A(r)$ hat 1916 *Karl Schwarzschild* (1873–1916) mit dem Ergebnis

$$A(r) = B(r)^{-1} \quad (4.3)$$

durchgeführt.

Der *Schwarzschild-Radius* r_c , definiert durch $B(r_c) = 0$, ist

$$r_c \equiv \frac{2GM}{c^2} \quad . \quad (4.4)$$

Damit ein Körper der Masse m und der Radialgeschwindigkeit v einem Gravitationspotential entkommen kann, muß

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq GMm/r \quad (4.5)$$

gelten. Im Extremfall, wenn die *zweite kosmische Geschwindigkeit* $v = c$ erreicht ist, kann selbst Licht nicht mehr entkommen. Der Schwarzschildradius r_c ist also der Ereignishorizont eines *Schwarzen Loches*.

4.1.1 Schwarze Löcher

Schwarze Löcher könnten sowohl im Urknall, als auch aus sterbenden Sternen entstanden sein. Wenn die Masse des ^{56}Fe -Kerns eines Sternes im Endstadium größer ist, als die *Chandrasekhar-Masse* von $1.4M_\odot$, so überkompensiert die Gravitationsanziehung den Elektronendruck, und der Kern kollabiert und explodiert schließlich in einer *Supernova*. Aus dem Überrest entsteht ein Neutronenstern, welcher selbst zu einem schwarzen Loch kollabiert, wenn die *Landau-Oppenheimer-Volkov-Masse* von $2.3M_\odot$ überschritten wird.

Setzen wir r_c in A und B bei $d\theta = d\phi = 0$ ein, so erhalten wir die *Schwarzschild-Metrik* zu

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_c}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_c}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{c^2} . \quad (4.6)$$

Nehmen wir an, ein Raumschiff flöge mit $v = dr/dt$ im Bezugssystem eines ruhenden Beobachters auf das schwarze Loch zu. Lichtsignale vom Raumschiff bewegen sich auf dem Lichtkegel $d\tau = 0$, so daß sich

$$v = \frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{r_c}{r}\right) \quad (4.7)$$

ergibt. Das Raumschiff wird für den externen Beobachter also immer langsamer, und bleibt bei $r = r_c$ schließlich stehen. Der Grund dafür ist, daß der Ausdruck

$$c \, dt = \frac{dr}{1 - r_c/r} \quad (4.8)$$

singulär wird, die Zeitintervalle dt also infinitesimal groß werden. Damit sinkt aber auch die Frequenz ν , und damit die Energie $E = h\nu$ der Lichtsignale. Da Photonen keine negative Energie besitzen, können sie uns nicht jenseits des Ereignishorizontes des schwarzen Loches erreichen. Daher die Bezeichnung „schwarzes Loch“.

Betrachten wir nun dieses Szenario aus der Sicht des Piloten. Zur Zeit t_0 befinde sich das Raumschiff am Ort r_0 in Ruhe. Nach der Zeitspanne τ hat es die Position r erreicht. Integrieren wir Gl. (4.6):

$$\int_0^\tau \sqrt{d\tau^2} = \tau = \int_{r_0}^r \left[\frac{1 - r_c/r}{(dr/d\tau)^2} - \frac{1}{c^2(1 - r_c/r)} \right]^{\frac{1}{2}} dr . \quad (4.9)$$

Gehen wir der Einfachheit halber davon aus, daß wir die Newtonsche Bewegungsgleichung benutzen dürfen. Mit

$$\frac{dr}{dt} = c \sqrt{\frac{r_c}{r}} \quad (4.10)$$

ergibt sich als eine mögliche Lösung für die Konvergenz von Gl. (4.9)

$$\tau \propto (r_0 - r)^{-3/2} . \quad (4.11)$$

Der Pilot kann also keine Singularität erkennen, seine Uhr läuft weiter. In sehr kurzer Zeit (10^{-4}s bei $10M_\odot$) erreicht er schließlich das Zentrum des schwarzen

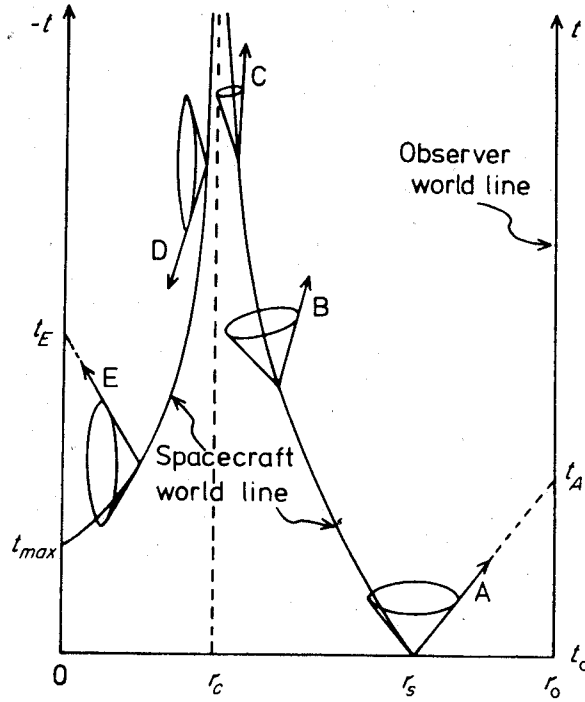


Abbildung 4.1: Ein Raumschiff fällt in ein schwarzes Loch (s. Text)

Loches. In Gl. (4.6) wird dabei ($r_c < r$) der zeitliche Term negativ, und der räumliche positiv, das heißt die Zeit wird zum Raum und der Raum wird zur Zeit. Dies ist in Abbildung 4.1 illustriert.

Im Punkt (A) befindet sich das Raumschiff am Radius r_s , der Beobachter an r_0 . Ein Lichtsignal des Raumschiffs erreicht diesen zur Zeit $t_A > t_0$ (rechte Zeitskala). Der Zukunfts-Lichtkegel des Raumschiffes kippt bei den Punkten (B) und (C) immer weiter zum schwarzen Loch hin, und verjüngt sich immer mehr, je näher es diesem kommt. Ein Lichtsignal wird den Beobachter zur Zeit $t_C \lg t_B \lg t_A$ erreichen. Bei (D) sind Zeit- und Raumrichtungen schließlich vertauscht, die Zukunft wird zur Vergangenheit und umgekehrt (linke Zeitskala). Ein Lichtsignal gelangt immer in das Zentrum des schwarzen Loches ($r = 0$), jedoch erst nachdem das Raumschiff selbiges erreicht hat (t_{max}). Der Lichtstrahl (E) erreicht das Zentrum vor dem Raumschiff ($t_E < t_{max}$), und ebenfalls noch bevor er ausgesendet wurde.

4.1.2 Quantenmechanische Betrachtung

Jedem quantenmechanischen Teilchen der Masse M kann eine *Comptonwellenlänge*

$$\lambda = \frac{\hbar}{Mc} \quad (4.12)$$

zugewiesen werden. Diese ist die Entfernung, unterhalb derer Quanteneffekte eine Rolle für das Teilchen spielen, ganz analog zum Schwarzschildradius, unterhalb dessen Gravitation keine Rolle mehr spielt. Gleichsetzen dieser beiden Längen führt zur *Planck-Masse*

$$M_P = \sqrt{\hbar c / G} = 1.221 \times 10^{19} \text{ GeV} / c^2 \quad . \quad (4.13)$$

Die Planck-Energie $M_P c^2$ führt zur *Planck-Zeit*

$$t_P = \frac{\lambda_P}{c} = 5.31 \times 10^{-44} \text{ s} \quad . \quad (4.14)$$

Obwohl kein Licht aus schwarzen Löchern entinnen kann, strahlen diese. Im Vakuum können sich Teilchen-Antiteilchen-Paare wie e^+e^- aus dem Nichts bilden, um danach wiederum durch *Annihilation* zu verschwinden. Da Energie aber weder erzeugt noch vernichtet werden kann, muß eines der Teilchen positive Energie, und das andere genausoviel negative Energie tragen.

In einem starken elektromagnetischen Feld kann dieses *virtuelle Paar* bis zum Abstand der Comptonwellenlänge getrennt werden, und damit in die Größenordnung des Schwarzschildradius gelangen. *Stephen Hawking* zeigte, daß es eine kleine Wahrscheinlichkeit gibt, daß eines der Teilchen aus dem „Quanten-Vakuum“ heraustunnelt. Es verläßt das schwarze Loch als reales Teilchen mit positiver Energie, und wird als *Hawking-Strahlung* detektiert. Aus Energieerhaltungsgründen verliert das schwarze Loch dabei an Masse.

Unsere bisherigen Betrachtungen bezogen sich lediglich auf einfache *Schwarzschild schwarze Löcher*, die weder elektrische Ladung tragen, noch rotieren. Solche mit Ladung nennt man *Reissner-Nordström schwarze Löcher*, jene mit einem Drehmoment *Kerr schwarze Löcher*. Ist dieses Drehmoment groß genug, kann es die Gravitation überkompensieren. Es handelt sich dann um eine *sichtbare Singularität*. Ebenso müssen komplizierte schwarze Löcher keine Singularität im Inneren besitzen. Materie kann dann durch ein sogenanntes *Wurmloch* in andere Universen tunneln. Geneigten Lesern sei an dieser Stelle *Stephen Hawkings 'Eine kurze Geschichte der Zeit'* empfohlen.

4.2 Feldgleichungen der Relativitätstheorie

Beim isotropen und homogenen Universum hängt die Krümmung nur vom Radius ab. Daher braucht man noch einen Krümmungsparameter. In diesem Fall reduzieren sich die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu den Friedmann-Gleichungen

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi}{3} G\rho \quad (4.15)$$

$$\frac{2\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = -\frac{8\pi}{c^2} G\rho \quad , \quad (4.16)$$

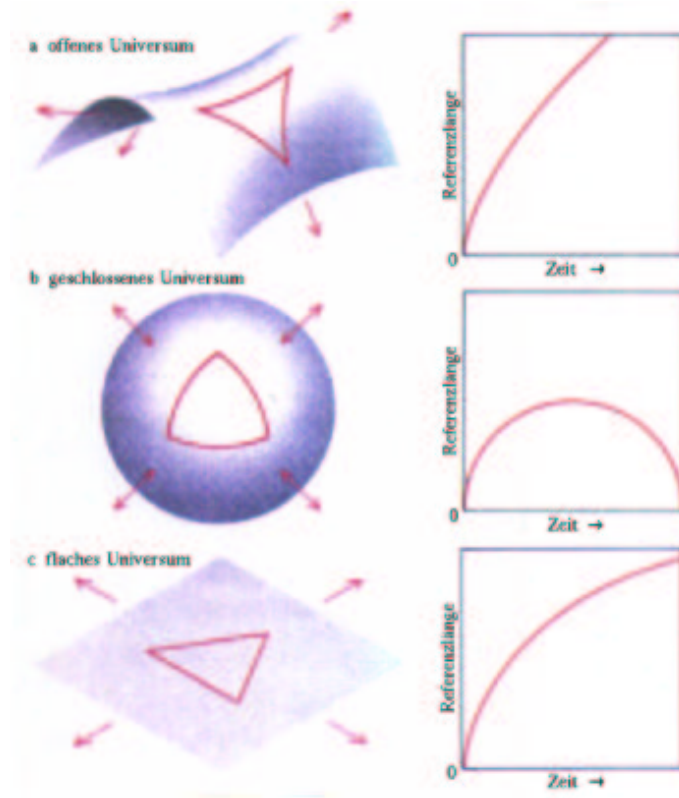


Abbildung 4.2: Darstellung der drei Arten des Universums und ihre zeitliche Entwicklung.

welche 1922 durch den russischen Physiker und Mathematiker *Alexander Friedmann* (1888–1925) hergeleitet wurden. Zu dieser Zeit glaubte übrigens noch nicht einmal Einstein an seine Gleichungen, da sie ein statisches Universum verbieten würden.

Die erste Gleichung kann direkt mit dem Kräftegleichgewicht der Newtonschen Mechanik (1.20) verglichen werden, wenn die Energie gleich dem Krümmungsterm $k/(2S^2)$ multipliziert mit der Energie mc^2 gesetzt wird. Daher entspricht $k = 0$ einer Gesamtenergie Null, da ein positiv (negativ) gekrümmtes Universum einer positiven (negativen) Energie entspricht. Bei einer negativen Energie überwiegt die Gravitationskraft und es kommt nach einer Expansionsphase zum „Big Crunch“, wie schon in Abb. 1.8. Bei einer positiven Energie hört die Expansion nicht auf (offenes Universum). Der Zusammenhang zwischen der Krümmung und der Entwicklung des Universums ist nochmals in Abb. 4.2 dargestellt.

Ziehen wir Gl. (4.15) von Gl. (4.16) ab, so erhalten wir

$$\frac{2\ddot{S}}{S} = -\frac{8\pi}{3c^2}G(\rho c^2 + 3p) \quad . \quad (4.17)$$

Die Beschleunigung der Expansion nimmt also mit zunehmendem Druck und zunehmender Energiedichte ab, weshalb wir eigentlich von einer *Verlangsamung* der Expansion sprechen sollten.

Setzen wir die Relation

$$\dot{S}(t) = H(t)S(t) \quad (4.18)$$

in die erste Feldgleichung (4.15) mit den gegenwärtigen Werten t_0, ρ_0, S_0, H_0 , und Ω_0 ein, so erhalten wir

$$kc^2 = H_0^2 S_0^2 (\Omega_0 - 1) \quad . \quad (4.19)$$

Es besteht also der Zusammenhang

$k = +1$	$\Omega_0 > 1$
$k = 0$	$\Omega_0 = 1$
$k = -1$	$0 < \Omega_0 < 1$

Friedmanns Feldgleichungen wurden erst nach seinem Tod, als sie 1927 durch eine unabhängige Herleitung von *Georges Lemaître* (1894–1966) bestätigt wurden, allgemein anerkannt.

4.2.1 Die Kosmologische Konstante λ

Nehmen wir an, das Universum sei statisch, also $\dot{S} = 0$ und $\ddot{S} = 0$. Gl. (4.15) vereinfacht sich dann zu

$$\frac{kc^2}{S_0^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho_0 = -\frac{8\pi}{c^2}Gp_0 \quad . \quad (4.20)$$

Da die Materiedichte ρ_0 heute positiv ist, muß $k = +1$ gelten. Dann ist nach obiger Gleichung aber der Materiedruck negativ. 1917 korrigierte Einstein dieses Problem, indem er die *kosmologische Konstante* λ einführte. Sie kommt von einer schwachen aber universellen auf Materie wirkenden Kraft. Friedmanns Gleichungen werden damit zu

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} - \frac{\lambda}{3} = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (4.21)$$

$$\frac{2\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} - \lambda = -\frac{8\pi}{c^2}G\rho \quad . \quad (4.22)$$

Diese Gleichungen beschreiben das sogenannte *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Universum*. Ein positives λ beschreibt eine abstoßende Kraft, und umgekehrt. Ist λ genau so groß, daß das Universum statisch ist, so spricht man vom *Einstein-Universum*. Der Materiedruck muß sehr gering sein, da sich sonst Galaxien – ähnlich wie Moleküle in einem Gas – ohne ausgezeichnete Richtung bewegen würden. Aus Gl. (4.21) wird mit $p = 0, S = S_0, \dot{S} = 0, \ddot{S} = 0$

$$\frac{kc^2}{S_0^2} - \frac{\lambda}{3} = \frac{8\pi}{3}G\rho_0 \quad . \quad (4.23)$$

In einem flachen Universum mit $k = 0$ folgt

$$\frac{\lambda}{8\pi G} = -\rho_0 \quad . \quad (4.24)$$

Dies ist die *Vakuum-Energiedichte*. Legen wir die anziehende Kraft der gegenwärtigen Materiedichte zugrunde, so können wir λ annähern:

$$-\lambda = 8\pi G\rho_0 = 3\Omega_0 H_0^2 \geq \frac{1}{3}10^{34}\text{s}^{-2} \approx 4 \times 10^{-52}\text{cm}^{-2} \quad . \quad (4.25)$$

Dies war bis dato die kleinste bekannte physikalische Größe. Es ist jedoch eine offene Frage, warum λ nicht Null ist, wie es natürlicher wäre.

Als Hubble 1929 die Expansion entdeckte, gab Einstein seinen Glauben an ein statisches Universum auf, verwarf seine kosmologische Konstante, und betitelte das Ganze als der ‚größte Fehler seines Lebens‘. Zwar wurde λ später wieder eingeführt, das augenblicklich populärste kosmologische Modell – das *Einstein-deSitter-Universum* – kommt jedoch wieder ohne aus.

4.2.2 Erhaltungssätze

Diskutieren wir nun die Friedmann-Gleichungen mit $\lambda = 0$ und einem sich nur langsam ändernden Druck $p \neq 0$. $\dot{p}$ kann gegenüber $\dot{\rho}$ und $\dot{S}$ vernachlässigt werden. Leiten wir Gl. (4.15) nach der Zeit ab

$$\frac{d}{dt}(\dot{S}^2 + kc^2) = \frac{8\pi}{3}G \frac{d}{dt}(\rho S^2) \quad , \quad (4.26)$$

so erhalten wir

$$2\dot{S}\ddot{S} = \frac{8\pi}{3}G(\dot{\rho}S^2 + 2\rho S\dot{S}) \quad . \quad (4.27)$$

Mit Gl. (4.17) können wir die zweite Zeitableitung eliminieren. Anschließende Multiplikation mit S ergibt

$$\dot{\rho}c^2S^3 + 3(\rho c^2 + p)S^2\dot{S} = 0 \quad . \quad (4.28)$$

Die Änderung der Energie pro Zeit ist also Null, wir können diese Gleichung als *Energieerhaltungssatz* interpretieren. Dieser folgte direkt aus den Friedmannschen Gleichungen.

Nehmen wir eine *adiabatische Expansion* des Universums an, dann folgt daraus, daß die Entropie s erhalten ist.

$$\dot{s} = 0 \quad (4.29)$$

Der Druck p sei proportional zur Energiedichte ρc^2 . Mit der Proportionalitätskonstante α , wobei $\dot{\alpha} = 0$, und $c \equiv 1$ folgt

$$p = \alpha\rho \quad . \quad (4.30)$$

Setzen wir dies in die Integration von Gl. (4.18)

$$\int \frac{\dot{\rho}(t)c^2}{\rho(t)c^2 + p(t)} dt = -3 \int \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} dt \quad (4.31)$$

ein, so erhalten wir die Beziehung zwischen der Energiedichte und dem Skalenfaktor S :

$$\rho \propto S^{-3(1+\alpha)} \quad . \quad (4.32)$$

Betrachten wir folgende drei Fälle:

1. Für ein *materiedominiertes* Universum aus nichtrelativistischer kalter Materie können wir $p = 0$ setzen. Damit ist nach Gl. (4.30) $\alpha = 0$. Gl. (4.32) wird somit zu (vgl. Abb. 4.3)

$$\rho \propto S^{-3}. \quad (4.33)$$

2. Für ein *strahlungsdominiertes* Universum, das mit einem relativistischen heißen Gas, welches aus nicht-wechselwirkenden Teilchen der Energiedichte ε besteht, gefüllt ist, folgt aus der statistischen Mechanik die Zustandsgleichung

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{3}\rho c^2 \quad . \quad (4.34)$$

Dies bedeutet $\alpha = \frac{1}{3}$, und damit für die Dichte (vgl. Abb. 4.3)

$$\rho \propto S^{-4} \quad . \quad (4.35)$$

3. Die *Vakuum-Energie* bezieht sich auf ein flaches, statisches Universum ($\ddot{S} = 0$, $\dot{S} = 0$, $k = 0$). Aus den Gln. (4.21)–(4.22) folgt

$$p = -\rho c^2, \quad \alpha = -1 \quad . \quad (4.36)$$

Der Druck der Vakuumenergie ist im Einklang mit der Definition (4.24) negativ. Für die Zustandsgleichung folgt

$$\rho \propto \text{const.} \quad (4.37)$$

4.2.3 Zeitentwicklung

Aus den ersten beiden Fällen folgt für kleine S die Ungleichung

$$\frac{kc^2}{S^2} \ll \frac{8\pi}{3}G\rho \quad , \quad (4.38)$$

welche für

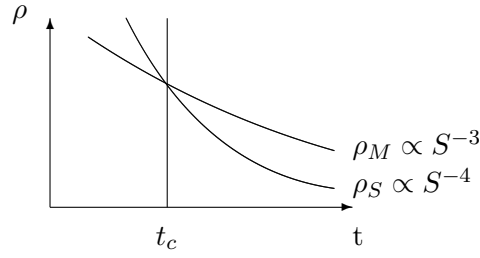


Abbildung 4.3: Dichteverlauf im Universum. Links von t_c herrscht *Strahlungsdominanz*, rechts davon *Materiedominanz*.

$$p > -\frac{1}{3}\rho c^2, \quad \alpha > -\frac{1}{3} \quad (4.39)$$

erfüllt ist. Deshalb können wir den Krümmungsterm in der ersten Feldgleichung (4.15) vernachlässigen, und erhalten diese zu

$$\frac{\dot{S}}{S} = H(t) = \left(\frac{8\pi}{3} G \rho \right)^{\frac{1}{2}} \propto S^{-3(1+\alpha)/2} \quad (4.40)$$

Führen wir die Integration

$$\int dS S^{-1+3(1+\alpha)/2} \propto \int dt \quad (4.41)$$

mit der unteren Grenze $S = 0$ bei t_{start} aus, so ergibt diese

$$\frac{2}{3(1+\alpha)} S^{3(1+\alpha)/2} \propto t - t_{start} \quad , \quad (4.42)$$

und mit $t_{start} = 0$

$$S(t) \propto t^{2/3(1+\alpha)} \quad (4.43)$$

Setzen wir die bekannten α ein, so folgt für ein materiedominiertes Universum

$$S(t) \propto t^{2/3} \quad , \quad (4.44)$$

und für ein strahlungsdominiertes Universum

$$S(t) \propto t^{1/2} \quad (4.45)$$

Offensichtlich ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t) = 0 \quad , \quad (4.46)$$

und wegen Gl. (4.40) mit $\alpha = \frac{1}{3}$ auch

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{S}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} S^{-1}(t) = \infty \quad (4.47)$$

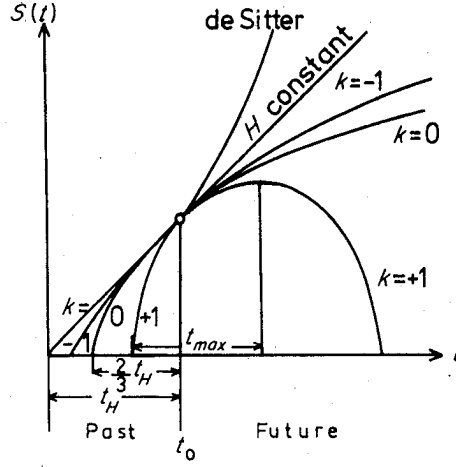


Abbildung 4.4: Die folgenden Szenarien beziehen sich auf eine konstante Steigung $H = H_0$ zur Gegenwart t_0 .

Im Fall $k = +1$: Geschlossenes Universum mit der Lebensdauer $2t_{max}$.

Im Fall $k = 0$: Flaches Universum. Seit $t = 2/3t_H$.

Im Fall $k = -1$: Offenes Universum. Seit $2/3t_H < t < t_H$.

Aus Gl. (4.35) und Gl. (4.46) ergeben sich für frühe Zeiten extreme Dichte und Temperatur.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = \lim_{t \rightarrow 0} S^{-4}(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0} p(t) = \lim_{t \rightarrow 0} S^{-4}(t) = \infty \quad (4.48)$$

Wie zuerst 1932 von Lemaître vorgeschlagen, wird der Zeitpunkt $t = 0$ *Big Bang* oder *Urknall* genannt.

Gl. (4.38) ist in einem flachen ($k = 0$) oder offenen ($k = -1$) Universum erfüllt, nicht aber in einem geschlossenem ($k = +1$). In diesem Fall fällt die Dichte nach Gl. (4.33) mit der dritten Potenz, der Krümmungsterm aber lediglich mit der zweiten Potenz. Bei der Größe S_{max} mit

$$S_{max}^{-2} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} \quad (4.49)$$

wird Gl. (4.38) verletzt. Da in diesem Fall in der ersten Feldgleichung $\dot{S} = 0$ ist, spricht man von der *Turnover-Zeit* t_{max} . Zur Zeit $2t_{max}$ ist das Universum wieder zur Größe „0“ geschrumpft. Man nennt dies *Big Crunch* (Abb. 4.4).

4.3 Inflationäres Szenario

Betrachten wir ein flaches Universum mit konstanter Materiedichte $\rho(t) = \rho_0$. Aus der Feldgleichung (4.21) folgt für die Expansionsrate

$$\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = H = \text{const.} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho_0 + \frac{\lambda}{3}} \quad . \quad (4.50)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist ein exponentiell expandierendes Universum

$$S(t) \propto e^{Ht} \quad . \quad (4.51)$$

Zwei Teilchen werden sich unter dieser Kraft also exponentiell voneinander entfernen. Wir werden dieses *inflationäre Verhalten* im Kapitel „Inflation“ noch genauer diskutieren. Es sei noch erwähnt, daß bei einem $\lambda < 0$ die Kraft anziehend ist. Man spricht dann von einem *Anti-deSitter-Universum*.

4.4 Dynamische Parameter

In Kapitel 4.2.1 haben wir die kosmologische Konstante diskutiert, die Einstein zunächst in die Feldgleichungen einführte, später aber wieder verwarf. Aus heutiger Sicht zu unrecht, denn nach der Quantenfeldtheorie ist ein solcher Term zu erwarten, da auch der leere Raum (das Vakuum) im Allgemeinen eine nicht verschwindende Energie besitzt. Die Vakuumenergie hat eine gravitative Wirkung, die genau der des kosmologischen Terms entspricht.

Aus der Vakuumenergiedichte und der Materiedichte lassen sich Rückschlüsse auf die Entwicklung des Universums ziehen. Das Ziel ist es, durch verschiedene unabhängige Methoden die Werte dieser beiden Größen einzugrenzen (Abb. 4.5).

4.4.1 Hubble-Diagramm der Supernovae vom Typ Ia

Supernovae vom Typ-Ia sind ausgezeichnete Standardkerzen, die sich zur Bestimmung des Hubble-Parameters eignen. Verläuft die kosmologische Expansion beschleunigt oder verzögert, so werden aber für große Abstände Abweichungen von der Geraden dadurch eintreten, daß die hier und heute bestimmten Geschwindigkeiten dem betreffenden Objekt um die Lichtlaufzeit früher zukommen und deshalb entsprechend kleiner bzw. größer sind. In Abb. 4.6 sind die Daten aus zwei verschiedenen Messungen aufgetragen.

In Abb. 4.5 sind die beiden Größen Ω_M und Ω_Λ gegeneinander aufgetragen. Aus den Daten der Supernovae ergeben sich die länglichen Likelihood-Gebiete. Da diese annähernd senkrecht auf den Geraden konstanter Raumkrümmung stehen, sagen diese Messungen fast nichts über die räumlichen Krümmungsverhältnisse aus. Diese werden erst durch die unten zu besprechende Messungen der Anisotropie des Mikrowellenhintergrundes wesentlich eingeschränkt, deren Likelihood-Gebiete stark entlang der Geraden verschwindender Raumkrümmung konzentriert sind d.h. $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$.

4.4.2 Anisotropie der Mikrowellenstrahlung

Obwohl schon die Supernovae-Daten bereits ziemlich deutlich für eine positive Vakuumenergiedichte sprechen, wird die Evidenz dafür wesentlich stärker in Verbindung mit den neusten Daten über die *Anisotropie der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung* gebracht (Abb. 4.7). Das von diesen Daten ausgesonderte längliche Gebiet in der $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ -Ebene in Abb. 4.5 steht nämlich nahezu senkrecht auf demjenigen der Supernovae-Daten. Es ergibt sich damit ein relativ kleines Überlappungsgebiet, das in Abb. 4.8 dargestellt ist.

4.4.3 Fazit

Durch die zwei besprochenen Experimente konnten schmale Gebiete in der $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ - Ebene ausgesondert werden. Zusammengenommen ergeben diese die ungefähren Werte

$$(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_K, q_0) \approx (1/3, 2/3, 0, -1/2), \quad (4.52)$$

wobei wir die unabhängigen Parameter Ω_K der Krümmung und den Bremsparameter q_0 gleich mit aufgelistet haben.

Das Universum ist demnach flach und befindet sich in einem Zustand beschleunigter Expansion, den es für alle Zukunft beibehalten wird. Die Materiedichte, inklusive der dunklen Materie, macht nur etwa $1/3$ der kritischen Dichte aus. Den doppelten und damit dominierenden Betrag an gravitativ wirksamer Energie- bzw. Massendichte stellt der kosmologische Term.

4.5 Übungen

1. Eine Galaxie der Rotverschiebung $z = 0.9$ enthält einen Quasar mit $z = 1.0$. Wieviele Schwarzschild-Radien gibt es unter der Annahme, daß diese zusätzliche Rotverschiebung durch die Nähe zu einem schwarzen Loch verursacht wurde?
2. Horizontal emittiertes Licht kommt in den Einfluß des erteigenen Gravitationsfeldes. Wie weit ist es nach einer Wegstrecke von 1 km vertikal abgelenkt worden? Berechnen Sie den Radius, bei dem sich Licht auf einer Kreisbahn um eine Masse M bewegt. Drücken Sie das Ergebnis in Schwarzschild-Radien aus.
3. Auf der Sonnenoberfläche ist die Beschleunigung bedingt durch eine Abstoßung einer nicht verschwindenden kosmologischen Konstante λ im Vergleich zur Newtonschen Anziehung bedeutungslos. Berechnen Sie dahingehend einen Wert für λ .
4. Leiten Sie die Gln.

$$S(t) \propto H^{-1} \cosh Ht \quad , \quad (4.53)$$

bei $k = +1$, sowie

$$S(t) \propto H^{-1} \sinh Ht \quad , \quad (4.54)$$

bei $k = -1$ für die Zeitabhängigkeit des kosmischen Skalenfaktors im deSitter-Modell her.

5. Zeigen Sie, daß sich der Teilchenhorizont σ_p im geschlossenen deSitter-Raum einer Konstanten annähert. Benutzen Sie den Skalenfaktor

$$S(t) \propto H^{-1} \cosh Ht \quad (4.55)$$

6. In der Newtonschen Mechanik kann die kosmologische Konstante durch Hinzufügen einer äußeren radialen Kraft

$$F = +\frac{1}{3} m\lambda r \quad (4.56)$$

auf einen Körper der Masse m im Abstand r vom Ursprung zur Gravitation vereinigt werden. Nehmen Sie an, daß $\lambda = -10^{-20} \text{ yr}^{-2}$, und daß F die einzige wirkende Kraft sei. Schätzen Sie die maximale Geschwindigkeit ab, die ein Körper erreichen wird, wenn sein Orbit mit der Größe des Sonnensystems (0.5 Lichttage) vergleichbar ist.

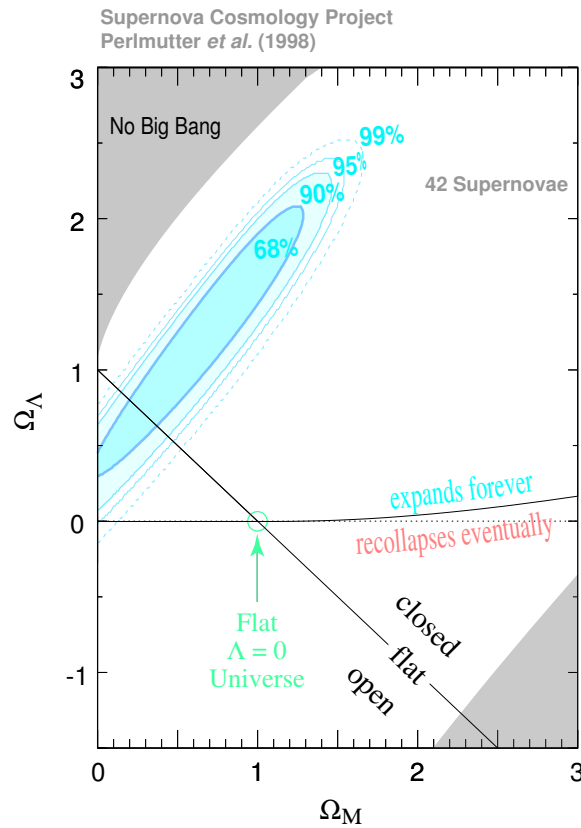


Abbildung 4.5: Aus der Beobachtung der Supernovae ergeben sich die Konfidenzgebiete (Ellipsenartige Bereiche) in der $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ - Ebene. Die Werte von Ω_M und Ω_Λ befinden sich mit der angegebenen Wahrscheinlichkeit innerhalb der markierten Flächen. Das schattierte Gebiet links oben entspricht zurückprallenden Modellen ohne Urknall. Das schattierte Gebiet rechts unten ist ausgeschlossen, da das Alter des Universums in diesem Bereich zu kurz ist. Die durchgezogenen Kurven trennen die Gebiete, in denen sich das Universum in der jeweils angegebenen Weise verhält. Das Diagramm ist [11] entnommen

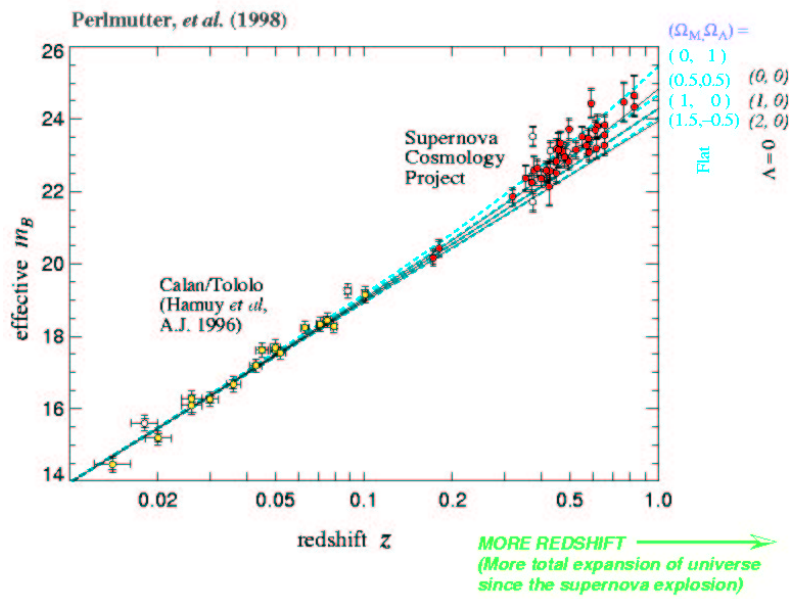


Abbildung 4.6: Hubble-Diagramm für 42 Typ-Ia-Supernovae bei hohen Rotverschiebungen des *Supernovae Cosmology Project* (SCP), sowie 18 Supernovae bei kleiner Rotverschiebung der Calan/Tololo Messung. Größere Magnituden entsprechen kleineren Helligkeiten. Die durchgezogenen Kurven entsprechen den theoretischen Erwartungen für $\lambda = 0$, die gestrichelten denjenigen für verschiedene flache Modelle. Das Diagramm ist [11] entnommen

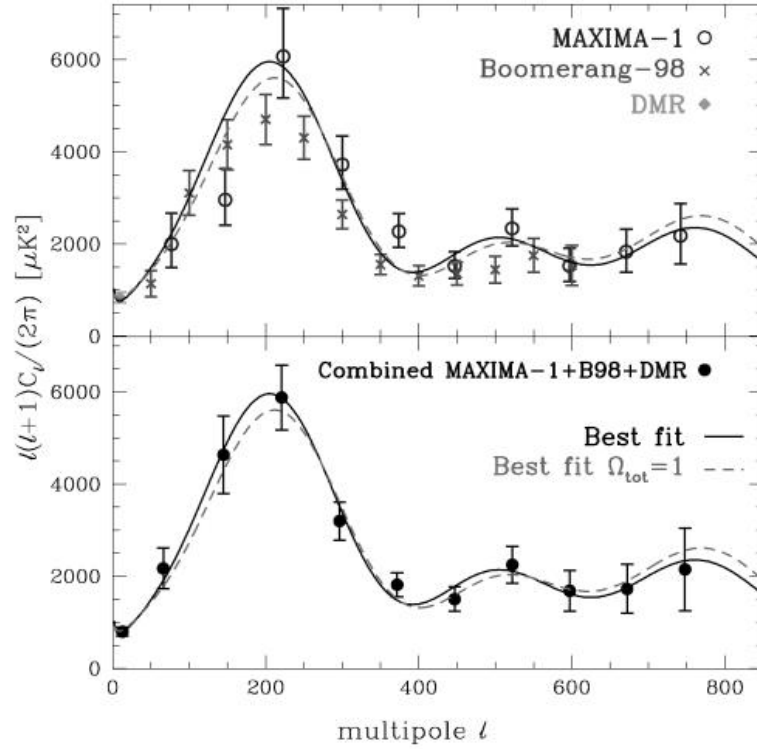


Abbildung 4.7: Leistungsspektrum der Anisotropie des Mikrowellenhintergrundes des Experimentes MAXIMA-1. l bezeichnet die Drehimpulsquantenzahl in der Multipolentwicklung. Deutlich ist ein erstes Maximum bei $l \approx 200$, entsprechend einer Winkeldistanz von $\Delta\Theta = \pi/l \approx 1^\circ$ zu sehen. Die gestrichelte Kurve entspricht einer besten Anpassung eines flachen Modells mit den kosmologischen Parametern $(\Omega_B, \Omega_M, \Omega_\Lambda, h) = (0.005, 0.3, 0.7, 0.7)$. Ω_B bezeichnet den baryonischen Anteil von Ω_M . Das Diagramm ist [13] entnommen

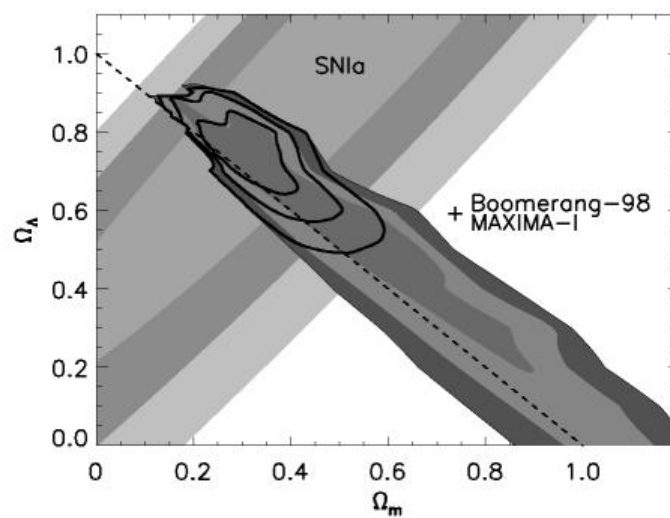


Abbildung 4.8: Konfidenzgebiete in der $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ - Ebene der kombinierten Boomerang-98 und Mxima-1 Daten mit den Supernovae Daten. Es ist deutlich das relativ kleine Überlappungsgebiet zu sehen, das die beiden zueinander transversalen Gebiete bilden. Flache Modelle liegen auf der schwarz-gestrichelten Diagonalen.

Kapitel 5

Thermodynamik

Im Urknallmodell beginnt das Universum in einem Zustand hoher Energiedichte und hohen Druckes, welchen die heutige Materie nicht überstehen würde. So besteht die Sonne aus einem Plasma ionisierten Wasserstoffs und Heliums. Bei noch höheren Temperaturen zerfallen diese Ionen in ihre Elementarteilchen (Elektronen, Protonen), die bei noch weiterer Erhöhung der Temperatur wiederum in ihre elementare Bausteine zerfallen (Quarks, Neutrinos). Dies ist in der Abbildung am Beginn dieses Skriptums illustriert.

Die Bewegung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld wird durch die *Maxwell-Lorentz-Gleichungen* beschrieben. Die *Coulombkraft*

$$F = \frac{e^2}{r^2} \quad (5.1)$$

hat die gleiche Form, wie die Newtonsche Gravitationskraft, wobei lediglich die Stärke der Wechselwirkung, ausgedrückt durch die *Kopplungskonstanten* $e^2 \leftrightarrow GMm_G$ verschieden sind.

5.1 Elektromagnetische Strahlung

5.1.1 Der schwarze Körper

Elektromagnetische Strahlung kann einerseits als Welle mit der Wellenlänge λ und der Frequenz $\nu = c/\lambda$ und andererseits als Energiequant, dem Photon γ mit der Energie

$$E = h\nu \quad (5.2)$$

beschrieben werden. h ist die Planck-Konstante.

Zu Beginn des Universums herrschte enorme Hitze und Druck in einem sehr kleinen Raumvolumen. Die Energiedichte im Universum wurde hauptsächlich durch Strahlung bereitgestellt, weshalb man von *strahlungsdominierter Ära* spricht.

Weil die Temperatur zu hoch war, konnten sich noch keine Atome oder Atomkerne formen. Lediglich deren Bausteine – freie Elektronen, Protonen, Neutronen und einige instabile Teilchen mit ihren Antiteilchen – konnten überleben. Sie kollidierten mit nahezu Lichtgeschwindigkeit ständig untereinander und tauschten sowohl mit ihresgleichen, als auch mit den Photonen Energie und Drehmoment aus. Es kann also angenommen werden, daß die Energie gleichmäßig unter ihnen verteilt war. Ein *thermisches Gleichgewicht* hatte sich eingestellt, die Photonen stellten einen *schwarzen Körper*, wie er 1900 von *Max Planck* hergeleitet wurde, dar.

Im Einheitsvolumen und dem Frequenzintervall $(\nu, \nu + d\nu)$ sind

$$n_\gamma(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (5.3)$$

Photonen der Energie $h\nu$ enthalten. Zur Herleitung dieser Formel sei auf die Thermodynamik und Quantenmechanik verwiesen. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts brauchte man dazu übrigens 40 Jahre. Erstaunlicherweise hängt Plancks Formel von lediglich einer Variablen, der Temperatur T ab. Der Peak des Energiespektrums von Photonen im thermischen Gleichgewicht liegt bei

$$\nu_{max} \approx 6 \times 10^{10} T, \quad (5.4)$$

wenn ν in Hertz und T in Kelvin gegeben sind.

5.1.2 Stefan-Boltzmann-Gesetz

Die Gesamtzahl der Photonen im Einheitsvolumen, die *Anzahldichte* N_γ ist gegeben durch

$$N_\gamma = \int_0^\infty n_\gamma(\nu) d\nu \approx 1.202 \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{kT}{c\hbar} \right)^3. \quad (5.5)$$

Da jedes Photon der Frequenz ν die Energie $h\nu$ trägt, ist die Gesamtenergiedichte der Strahlung durch das *Stefan-Boltzmann-Gesetz*

$$\epsilon_\gamma = \int_0^\infty h\nu n_\gamma(\nu) d\nu = \frac{\pi^2}{15} \frac{k^4 T^4}{\hbar^3 c^3} \equiv aT^4 \quad (5.6)$$

gegeben. Die nach *Josef Stefan* (1835–1893) und *Ludwig Boltzmann* (1844–1906) benannte Konstante a enthält alle zuvor verwendeten konstanten Werte.

5.2 Adiabatische Expansion

Betrachten wir ein *adiabatisch* expandierendes System unter dem konstanten Druck p . Es habe das mitbewegende Volumen $V = \frac{4}{3}\pi S^3$ und die Energie $E = \epsilon V$. Nach dem *zweiten thermodynamischen Gesetz* folgt für die Entropieänderung (Die Entropie sei s , da S schon für den Skalenfaktor benutzt wird.)

$$ds = \frac{1}{kT} [d(\varepsilon V) + p dV]. \quad (5.7)$$

Adiabatisch bedeutet $\dot{s} = 0$, und damit folgt aus Gl. (5.7)

$$dE = -p dV. \quad (5.8)$$

Nehmen wir an, das Universum kann während der strahlungsdominierten Ära als ideale Flüssigkeit aus Photonen und Elementarteilchen im thermischen Gleichgewicht betrachtet werden, so expandiert selbiges adiabatisch. Ebenso gilt dies für große Maßstäbe – unter denen das Universum homogen erscheint – für die materiedominierte Ära.

5.2.1 Energiedichten

Die Energiedichte eines Photons im Volumen V ist

$$\varepsilon_r = \frac{h\nu}{V} = \frac{hc}{V\lambda} \propto S^{-4}, \quad (5.9)$$

wobei die Proportionalität durch die Wellenlänge und das Volumen bestimmt wird. Gleiches gilt nach der Zustandsgleichung

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon \quad (5.10)$$

für den Druck. Der Vorfaktor rührt von der Mittelung über die drei Raumrichtungen.

Die Energiedichte der Materie ist

$$\varepsilon_m = \rho c^2 = \frac{Mc^2}{V} \propto S^{-3}, \quad (5.11)$$

womit sich schließlich

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_m} \propto \frac{S^{-4}}{S^{-3}} \propto S^{-1} \quad (5.12)$$

ergibt.

Die heutige Materiedichte ist nicht bekannt, da wir nur sichtbare Materie beobachten können, aber keine andersartige (z.B. *Dunkle Materie*). Wir können das Strahlungs-/Materie-Verhältnis aber nach oben abschätzen.

$$\frac{\varepsilon_r}{\rho_0 c^2} \leq 10^{-3} \quad (5.13)$$

Mit abnehmendem Alter des Universums erreichen wir also irgendwann einen Punkt, in dem $\varepsilon_r = \varepsilon_m$ gilt. (Abbildung 5.1) Dies ist der Übergang von der Strahlungsdominanz zur heutigen Materiedominanz.

Nach der Beziehung $E = kT$ skaliert also auch die Temperatur der Strahlung mit

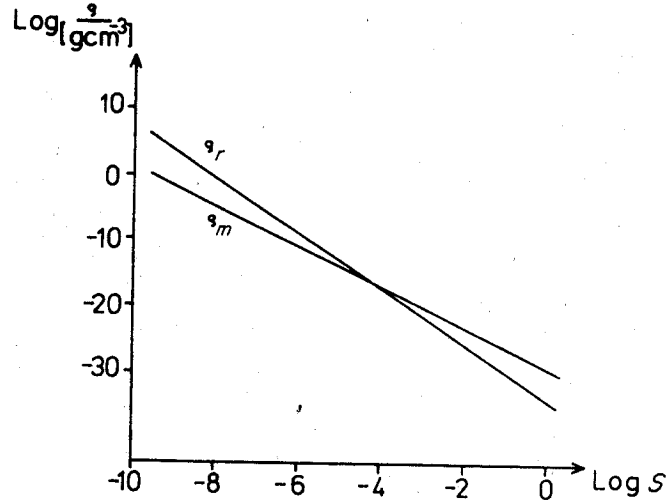


Abbildung 5.1: Die Abhängigkeit der Energiedichten von Strahlung ρ_r und Materie ρ_m vom Skalenfaktor S .

$$T_r \propto S^{-1}. \quad (5.14)$$

5.2.2 Relativistische Teilchen

Betrachten wir nun relativistische Teilchen der Strahlungsära. Für masselose Teilchen können wir den Term der Ruhemasse in

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + P^2 c^2} \quad (5.15)$$

vernachlässigen. Ebenso allgemein für relativistische Teilchen. Setzen wir Gl. (5.10) in Gl. (5.8), welche auch für relativistische Teilchen gilt ein, so erhalten wir

$$S^3 d\varepsilon_r + \varepsilon_r d(S^3) = -\frac{1}{3} \varepsilon_r d(S^3), \quad (5.16)$$

oder

$$\frac{d\varepsilon_r}{\varepsilon_r} = -\frac{4}{3} \frac{dS^3}{S^3}. \quad (5.17)$$

Die Lösung dieser DGL ergibt das bereits bekannte

$$\varepsilon_r \propto S^{-4}. \quad (5.18)$$

5.2.3 Nichtrelativistische Teilchen

Der nichtrelativistische Fall gestaltet sich schwieriger, da wir die Ruhemasse in Gl. (5.15) nicht mehr vernachlässigen können. Die Bewegung von n Teilchen

im Einheitsvolumen ist charakterisiert durch die Temperatur T_m aus, die den Druck

$$p = nkT_m \quad (5.19)$$

verursacht. Die Zustandsgleichung lautet

$$p = \frac{2}{3}\varepsilon_{kin}. \quad (5.20)$$

Mit der Ruhemasse der n Teilchen folgt

$$\varepsilon_m = nmc^2 + \frac{3}{2}nkT_m. \quad (5.21)$$

Setzen wir Gl. (5.19) und Gl. (5.21) in Gl. (5.16) ein, so erhalten wir

$$d(S^3nmc^2) + d(S^3\frac{3}{2}nkT_m) = -nkT_mdS^3. \quad (5.22)$$

Nehmen wir nun näherungsweise an, die Zahl der Teilchen $N = Vn$ im Volumen V sei unabhängig von ihren verschiedenartigen Interaktionen erhalten,

$$dN = d(Vn) = d\left(\frac{4\pi}{3}S^3n\right) = 0, \quad (5.23)$$

so folgt aus Gl. (5.22), daß

$$\frac{3}{2}d(S^3T_m) = -T_md(S^3), \quad (5.24)$$

oder

$$\frac{3}{2}\frac{dT_m}{T_m} = -\frac{d(S^3)}{S^3}. \quad (5.25)$$

Die Lösung dieser DGL ergibt

$$T_m \propto S^{-2}. \quad (5.26)$$

Die Temperatur nichtrelativistischer Materie zeigt also eine andere Abhängigkeit vom Skalenfaktor, als die Temperatur der Strahlung! Bei der Expansion des Universums kühlt Materie schneller ab, als Strahlung. Somit können kalte Materie und heiße Strahlung bezüglich kosmischer Zeiträume *niemals* im thermischen Gleichgewicht sein! Es sei noch nachgetragen, daß es genau dieser Umstand erlaubt hat, die Lösungen für kalte Materie und heiße Strahlung getrennt herzuleiten.

5.3 Freeze-Out

5.3.1 Freiheitsgrad g

Tabelle 5.1 gibt die Anzahl der Spinzustände n_{spin} an. n_{anti} ist für Teilchen mit einem Antipartner gleich zwei, ansonsten gleich eins. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist

Teilchen	Typ	n_{spin}	n_{anti}	g
γ	Vektorboson	2	1	2
ν_e, ν_μ, ν_τ	Fermion (Lepton)	1	2 (?)	$\frac{7}{4}$ (?)
e^-, μ^-, τ^-	Fermion (Lepton)	2	2	$\frac{7}{2}$
$\pi^\pm, \pi^0$	Boson (Meson)	1	1	1
p, n	Fermion (Baryon)	2	2	$\frac{7}{2}$
$W^\pm, Z$	Vektorboson	3	1	3

Tabelle 5.1: Freiheitsgrade

$$g = n_{spin} n_{anti} n_{pauli}, \quad (5.27)$$

wobei $n_{pauli} = \frac{7}{8}$ für Fermionen und $n_{pauli} = 1$ für Bosonen ist.

5.3.2 Teilchenstatistiken

Betrachten wir nun, analog zu den Photonen, die Anzahlldichte anderer relativistischer Teilchen. Die Energie $h\nu$ in Gl. (5.3) ersetzen wir durch die Energie E in Gl. (5.15). Wir können die Planck-Verteilung durch die Anzahlldichte von Teilchen der Sorte i im Impulsintervall $p = |\mathbf{p}|$ und $p + dp$ ersetzen.

$$n_i(p)dp = \frac{8\pi}{h^3} \frac{n_{spin,i}}{2} \frac{p^2 dp}{e^{E_i(p)/kT_i} \pm 1} \quad (5.28)$$

Im Nenner steht -1 für Bosonen (*Bose-Statistik*), und $+1$ für Fermionen (*Fermi-Statistik*). Für nichtrelativistische Teilchen kann der Term ± 1 in Gl. (5.28) vernachlässigt werden, da die Teilchenenergie kT kleiner als ihre Ruhemasse ist. Schreiben wir die Fermi-Statistik als Funktion der Temperatur, so erhalten wir die *Maxwell-Boltzmann-Statistik*

$$N = n_{spin} \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{(ch)^3} e^{-E_i/kT_i}. \quad (5.29)$$

5.3.3 Die Entkoppelung

Die Arten der Teilchen, die im thermischen Gleichgewicht zu einer bestimmten Zeit existieren, wird einerseits durch die *Mittlere Reaktionsrate*

$$\Gamma = \langle N v \sigma(E) \rangle, \quad (5.30)$$

wobei $\sigma(E)$ der Wirkungsquerschnitt ist, und andererseits durch die *Expansionsrate*

$$H = \frac{\dot{S}}{S} = \sqrt{\frac{16\pi G a}{3c^2} g_{eff} T^2} \quad (5.31)$$

bestimmt. Multipliziert man den Wirkungsquerschnitt mit der Anzahldichte N der Teilchen, so erhält man die *Mittlere Freie Weglänge* Γ^{-1} . Falls die Reaktionsrate im Vergleich zur Expansionsrate klein ist, können sich die Teilchen zur Wechselwirkung untereinander nicht mehr finden. Die Bedingung für ein thermisches Gleichgewicht lautet somit

$$\frac{\Gamma}{H} \geq 1. \quad (5.32)$$

Der Wirkungsquerschnitt der schwachen Wechselwirkung ist mit der Fermi-Kopplungskonstanten G_F

$$\sigma_{SWW} \approx \frac{(G_F k)^2}{\pi(\hbar c)^4} T^2. \quad (5.33)$$

Nach Gl. (5.5) ist die Anzahldichte der Neutrinos proportional T^3 , weshalb die Wechselwirkungsrate von Neutrinos insgesamt proportional T^5 ist. Eingesetzt in Gl. (5.32) folgt daraus

$$\frac{\Gamma_{SWW}}{H} \propto T^3. \quad (5.34)$$

Es gibt also eine Temperatur, welche klein genug ist, daß Gl. (5.32) nicht mehr erfüllt ist. Die Neutrinos entkoppeln dann von allen Wechselwirkungen und expandieren frei. Dieser *Freeze-Out* findet für ν_μ und ν_τ bei 3.5 MeV, und für ν_e bei 2.3 MeV statt.

5.4 Übungen

1. Zeigen Sie, daß eine Expansion um den Faktor S das Schwarzkörperspektrum (5.3) bis auf die Abnahme von T auf T/S nicht verändert.
2. Beweisen Sie die für Strahlung im thermischen Gleichgewicht geltende Beziehung

$$P = \frac{1}{3} \rho c^2. \quad (5.35)$$

3. Betrachten Sie zwei Protonen. Wie groß ist das Verhältnis von elektrischer zu gravitativer Kraft?
4. Ein kugelförmiger (Radius r) schwarzer Satellit fliegt mit dem Abstand d um die Sonne. Die Sonne strahlt wie ein Schwarzkörper bei 6000 K. Der Satellit sieht die Sonne unter einem Winkel $\theta \ll 1$. Leiten Sie einen Ausdruck für die Gleichgewichts-Temperatur des Satelliten in Abhängigkeit von θ her. Wie groß ist die Energie pro Zeiteinheit, die vom Satelliten absorbiert, bzw. emittiert wird?
5. Berechnen Sie mit Gl. (2.26) die Energie und Geschwindigkeit eines Myons, welches aus Zerfall eines Pions in Ruhe stammt. Das Neutrino wird hierbei masselos angenommen.

6. Der Wirkungsquerschnitt für Neutrinos ist etwa $\sigma = 10^{-44} \text{ cm}^2$ pro Nukleon. Berechnen Sie die *mittlere freie Weglänge*

$$\ell = \frac{1}{\sigma \rho} \quad (5.36)$$

für Neutrino-Einfang im Zentrum der Sonne ($\rho \approx 100 \text{ g/cm}^3$). Rechnen Sie das Ergebnis in Parsec um, und vergleichen Sie mit dem Radius der Sonne.

7. Pionen verschwinden unterhalb von 140 MeV durch Annihilation und Zerstreuung. Zu dieser Zeit erhöht sich die Temperatur der verbleibenden Teilchen als Konsequenz der Entropieerhaltung. Berechnen Sie den Faktor der Temperaturerhöhung.

Kapitel 6

Der frühe Kosmos

6.1 Kosmische Hintergrundstrahlung

6.1.1 Rekombination

Im Jahre 1948 versuchten *Georg Gamow*, *Ralph Alpher*, und *Robert Herman* die momentane Temperatur der primordialen Schwarzkörperstrahlung zu berechnen. Mittels Formalismen, die wir im vorangegangenen Kapitel kennengelernt haben, fanden sie heraus, daß die *Kosmische Hintergrundstrahlung* — im folgenden mit CMB (*Cosmic Microwave Background*) abgekürzt — auch heute noch zu messen sein muß. Ihre Temperatur sollte nach

$$\gamma = \frac{hc}{kT_0} = 2.9 \text{ mm} \quad (6.1)$$

noch

$$T_0 \approx 5 \text{ K} \quad , \quad (6.2)$$

was im Mikrowellenbereich liegt, betragen.

Die Hintergrundstrahlung ist entstanden, als Protonen und Elektronen zu Wasserstoff fusionierten, die Photonen dann keine Streupartner mehr hatten, und somit entweichen konnten. Nehmen wir an, die Rekombination fand zur Zeit $t_{\text{rec}} \approx 350000 \text{ yr}$, bzw. bei einer Temperatur von $T_{\text{rec}} \approx 3000 \text{ K}$ statt. Nach Gl. (5.11) hängen diese Werte von Ω_0 ab. Da dessen Wert nur ungefähr bekannt ist, sind auch die obigen Werte entsprechend ungenau. Mit einem Alter des Universums von 1.5×10^{10} Jahren ergibt sich nach Gl. (4.43) die heutige Temperatur des CMB zu

$$T_0 = T_{\text{rec}} \left(\frac{t_{\text{rec}}}{t_0} \right)^{2/3} = 2.45 \text{ K} \quad . \quad (6.3)$$

Da das Urknallmodell zu dieser Zeit noch als sehr spekulativ angesehen wurde, nahm eigentlich niemand groß Kenntnis von dieser Theorie. 1964 testeten schließlich *Arno Penzias* und *Robert Wilson* eine Antenne zur Satellitenkommunikation (Abb. 6.1). Zur Kalibration wählten sie eine Wellenlänge von

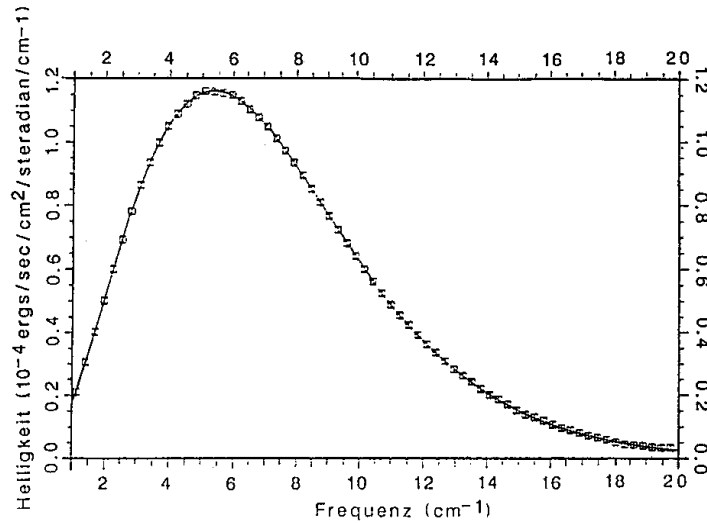


Abbildung 6.1: Spektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung, gemessen mit dem FIRAS-Detektor auf dem COBE-Satelliten. Die durchgezogene Linie ist das angepaßte Schwarzkörperspektrum.

$\gamma = 7.35$ cm, da in diesem Bereich die Auswirkungen der langwelligeren Galaxienemissionen, bzw. der kurzwelligeren atmosphärischen Strahlungen, relativ schwach sind. Unabhängig von der Ausrichtung der Antenne maßen sie einen Untergrundpegel, den sie deshalb auf technische Probleme zurückführten. Da dieser aber selbst nach sorgfältiger Überprüfung und Reinigung der Antenne nicht verschwand, nahmen sie an, daß das Universum mit einer isotropen und unpolarisierten Strahlung gefüllt war, die einer Schwarzkörper-Temperatur von 3.5 K entspricht.

Robert Dicke et. al. bereiteten zur gleichen Zeit an der Princeton University die Messung des CMB vor, und im Jahre 1965 veröffentlichten Penzias und Wilson ihre Resultate in Verbindung mit einem Artikel von Dicke. Dafür erhielten sie 1978 den Nobelpreis für Physik. Sowohl Gamow als auch Dicke gingen leer aus. Der CMB wird nach Hubble übrigens als die wichtigste Entdeckung in der Kosmologie eingestuft, da er auch ein sicheres Indiz für das Urknallmodell ist. Aufgrund der Transparenz des Universums gegenüber Mikrowellenstrahlung ist kein Mechanismus bekannt, der ein solches Schwarzkörperspektrum nach dem Zeitpunkt der Rekombination hätte erzeugen können.

6.1.2 Extraterrestrische Messungen

Trotz einiger Penzias und Wilson folgenden Messungen, konnte der Beweis eines Schwarzkörperspektrums erst durch das Instrument FIRAS (Far Infrared Absolute Spectrophotometer) auf dem 1989 von der NASA (National Aeronautics and Space Administration) gestarteten Satelliten COBE (Cosmic Background Explorer) durchgeführt werden, da somit die absorbierende Erdatmosphäre aus-

geschaltet war (Abb. 6.1). Die gemessene Temperatur betrug

$$T_0 = (2.726 \pm 0.01) \text{ K} \quad . \quad (6.4)$$

Noch nie wurde in Laborexperimenten ein perfekteres Schwarzköperspektrum gemessen. Dies gestattet uns folgende Neuberechnungen:

Für g_{eff} erhalten wir

$$g_{\text{eff}}(T_0) = 3.36 \quad , \quad (6.5)$$

woraus folgt, daß Neutrinos eine um $(4/11)^{1/3}$ kleinere Temperatur als Photonen, und damit eine kleinere Masse als T_0 haben.

Der Wert des Dichteparameters ergibt sich zu

$$\Omega_{r,0} = \frac{\epsilon_{r,0}}{\rho_c c^2} \approx 4.11 \times 10^{-5} h^{-2} \quad . \quad (6.6)$$

Daraus läßt sich nach Gl. (5.11) der Zeitpunkt der Rekombination zu

$$t_{\text{rec}} = \left(\frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_0} \frac{3.36}{3.36 + 3.5} \right)^{3/2} t_0 \approx 4.26 \times 10^{10} (\Omega_0 h^2)^{-3/2} \text{ s} \quad (6.7)$$

bestimmen.

Die Anzahldichte der Photonen im CMB ist $N_\gamma = 410 \text{ cm}^{-3}$, die Neutrinotemperatur ist $T_{\nu,0} = 1.946 \text{ K}$.

6.2 Anisotropien im Mikrowellenhintergrund

Mit zunehmender Meßgenauigkeit entdeckte man eine Dipol-Anisotropie im CMB. Die Temperatur variiert von einer maximalen Blauverschiebung in Richtung α zu einer maximalen Rotverschiebung in Richtung $\alpha + 180^\circ$ in der Form

$$T(\theta) = T(\alpha)(1 + \nu \cos \theta) \quad , \quad (6.8)$$

wobei ν die Amplitude der Dipol-Anisotropie ist. Obgleich diese Verschiebung mit $\nu T(\alpha) \approx 3.3 \text{ mK}$ gering ist, wurde sie experimentell bestätigt.

6.2.1 Eigengeschwindigkeit

Die Dipol-Anisotropie kann nicht kosmologischen Ursprungs sein, da im Standardmodell die Expansion kugelsymmetrisch ist. Sie wird durch die Dopplerverschiebung, bedingt durch unsere Eigenbewegung gegenüber dem CMB in Richtung maximaler Blauverschiebung mit der Relativgeschwindigkeit v , erklärt. Somit gibt es ein Bezugssystem, in dem der CMB isotrop ist. Dieses befindet sich wegen $v_\gamma \neq 0$ nicht in Ruhe. Es bewegt sich mit der Expansion des Universums.

Die Interpretation heute ist, daß sich nicht nur die Erde um die Sonne und das Sonnensystem in der Galaxienrotation bewegt, sondern daß auch unsere Galaxie eine Geschwindigkeit relativ zu unserer lokalen Gruppe hat, welche wiederum in ein Zentrum hinter dem Hydra-Centaurus Supercluster fällt (Abb. 6.2). Sowohl wir, als auch unsere lokale Gruppe sind also ein Teil eines größeren gravitativen Systems.

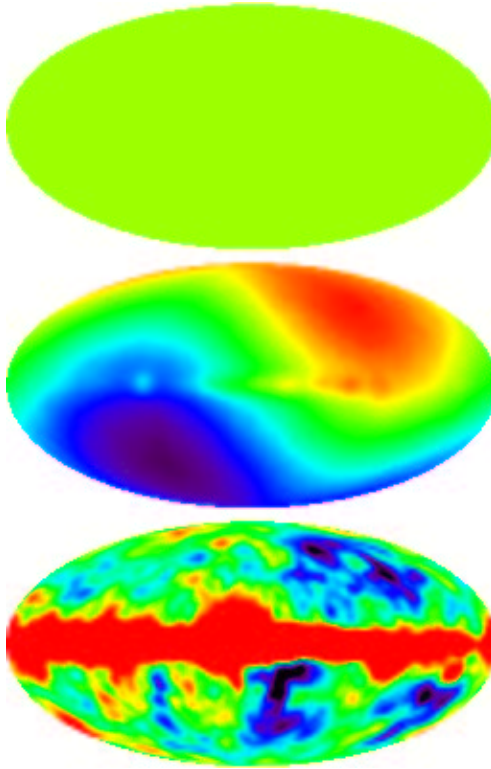


Abbildung 6.2: Diese drei, von COBE aufgenommenen Bilder zeigen die Milchstraße. Die Rotationsebene der Milchstraße geht horizontal durch das Zentrum eines jeden Bildes. Das oberste Bild zeigt die Temperatur des mikrowellen Hintergrundes auf einer Temperaturskala von 0 bis 4 Kelvin. Im nächsten Bild reicht die Skala von 2.724 K bis 2.732. Hieraus geht deutlich die Dipol-Anisotropie hervor. Im untersten Bild wurde diese Anisotropie subtrahiert. Die Temperaturdifferenz zwischen kalten und warmen Regionen beträgt lediglich 0.0002 Kelvin.

6.3 Nukleosynthese

6.3.1 Entstehung der leichten Elemente

Bei Energien von einigen MeV können sich durch Kernfusion bereits leichte Elemente bilden. Die Bindungsenergie eines *Deuteron* d ist

$$m_p + m_n - m_d = 2.22 \text{ MeV} \quad .$$

Sie wird durch Strahlung frei.



Solange im hochenergetischen Teil des Planck-Spektrums noch Photonen von 2.22 MeV vorhanden sind, kann die Reaktion (6.9) in die andere Richtung ablaufen: Die Deuteronen *photodesintegrieren* in freie Protonen und Neutronen. Die Deuteron-Produktion wird aber aus Gründen der Thermodynamik noch stärker behindert: Bei jeder Deuteron-Produktion muß sich die Entropie auf die noch verbleibenden Nukleonen verteilen. Deshalb steigt deren Temperatur, was wiederum der Bildung von Deuteronen entgegenwirkt. Die Anzahldichte der Baryonen ist heute

$$N_B = \frac{\rho_B}{m_B} = \frac{\Omega_B \rho_c}{m_B} \approx 1.13 \times 10^{-5} \Omega_B h^2 \text{ cm}^{-3} \quad (6.10)$$

Das Verhältnis von Baryonen zu Photonen ergibt sich damit zu

$$\eta \equiv \frac{N_B}{N_\gamma} \approx 2.76 \times 10^{-8} \Omega_B h^2 \quad (6.11)$$

${}^3\text{He}^{++}$ entsteht in den Fusionsreaktionen



Die Bindungsenergie des entstehenden Teilchens ist

$$2m_p + m_n - m({}^3\text{He}^{++}) = 7.72 \text{ MeV} \quad . \quad (6.14)$$

Durch die große Entropie pro Nukleon wird auch diese Reaktion behindert.

Das *Triton*, der gebundene Zustand ${}^3\text{H}^+$ entsteht in den Fusionsreaktionen



mit der Bindungsenergie

$$m_p + 2m_n - m_t = 8.48 \text{ MeV} \quad . \quad (6.18)$$

Die Fusion des Deuteriums



mit der Bindungsenergie

$$2m_p + 2m_n - m(^4\text{He}^{++}) = 28.3 \text{ MeV} \quad (6.20)$$

tritt wesentlich seltener auf, als die Produktion von $^3\text{He}^{++}$ und $^3\text{H}^+$. Da sie aber aus Gründen der Entropie favorisiert ist, und ebenfalls keine Photonen mit ausreichender Energie zur Photodesintegration mehr zur Verfügung stehen, muß auch die Entstehung von $^4\text{He}^{++}$ über einen Zwischenschritt beachtet werden. Mögliche Reaktionen sind

$$n + ^3\text{He}^{++} \rightarrow ^4\text{He}^{++} + \gamma, \quad (6.21)$$

$$d + ^3\text{He}^{++} \rightarrow ^4\text{He}^{++} + p, \quad (6.22)$$

$$p + t \rightarrow ^4\text{He}^{++} + \gamma, \quad (6.23)$$

$$d + t \rightarrow ^4\text{He}^{++} + n. \quad (6.24)$$

Bei Energien kleiner als 0.8 MeV wird das n/p -Verhältnis durch schwache Wechselwirkungen zwischen Leptonen und Nukleonen weiter reduziert. Bei 0.1 MeV, oder 1.2×10^9 K, oder 2 Minuten werden die freien Neutronen mit einer mittleren Lebenszeit von 14.8 Minuten durch *Betazerfall* schon in großer Anzahl in Protonen umgewandelt. Zu dieser Zeit hat das n/p -Verhältnis bereits seinen endgültigen Wert

$$\frac{N_n}{N_p} \approx \frac{1}{7} \quad (6.25)$$

erreicht. Abb. 6.3 zeigt die Temperaturabhängigkeit sowohl von diesem Verhältnis, als auch von der Maxwell-Boltzmann-Verteilung.

6.3.2 Die schweren Elemente

Das Endstadium der Nukleosynthese, wie wir es heute messen, war bereits zwischen 100 und 700 Sekunden nach dem Urknall erreicht. Das Universum bestand — und besteht auch heute noch — fast ausschließlich aus Wasserstoff und Helium. Warum gibt es also keinen signifikanten Anteil schwererer Elemente?

Es ist eine Eigenart der Natur, daß zwar Kerne mit $A = 1 \dots 4$ Nukleonen existieren, es aber keinen mit $A = 5$ Nukleonen gibt. Auch der Kern mit $A = 8$ Nukleonen ist nicht stabil. Dazwischen sind nur die instabilen Kerne ^6Li und ^7Be , sowie das stabile ^7Li . Wegen dieser großen Lücke, und weil ^4He so stark gebunden ist, hört die Nukleosynthese nach der ^4He -Produktion auf.

Die Fusionsrate bei der Energie E zweier Kerne der Ladungen Z_1, Z_2 ist proportional dem *Gamow-Faktor*

$$\exp\left(-\frac{2Z_1Z_2}{\sqrt{E}}\right) \quad (6.26)$$

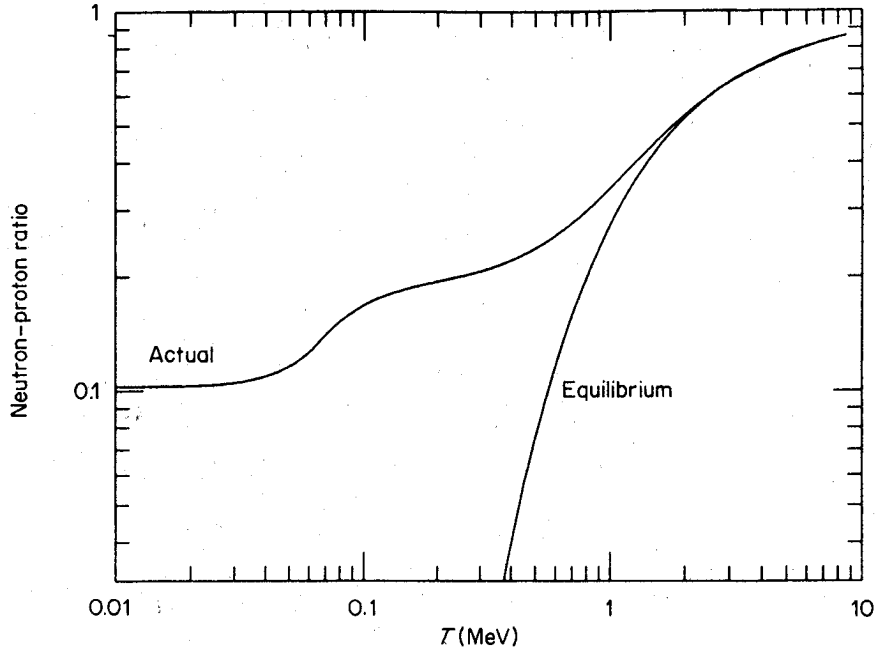


Abbildung 6.3: Verhältnis von Neutronen zu Protonen im thermodynamischen Gleichgewicht und zur heutigen Zeit.

Die Fusion von schweren Kernen wird also mit abnehmender Energie schnell sehr unwahrscheinlich.

6.3.3 Massenverhältnisse

Die Massenverhältnisse der leichten Elemente erlauben eine wichtige Aussage über das n/p -Verhältnis zur Zeit der Nukleosynthese. Tatsächlich ist dies die frühest mögliche Quelle an Informationen über den Urknall.

Aus dem Verhältnis (6.25) erhalten wir direkt das Verhältnis

$$X_4 \equiv \frac{N(^4\text{He})}{N(^1\text{H})} = \frac{N_n/2}{N_p - N_n} \approx \frac{1}{12} \quad . \quad (6.27)$$

Üblicherweise gibt man das Verhältnis der Masse von ^4He zur Gesamtmasse $^1\text{H} + ^4\text{He}$ an.

$$Y_4 \equiv \frac{4X_4}{1 + 4X_4} \approx 0.25 \quad (6.28)$$

Das Verhältnis η der Anzahldichten von Baryonen zu Photonen ist proportional zur Baryonendichte Ω_B . Steigt diese, so nimmt die Entropie pro Baryon ab, und die Helium-Produktion kann früher einsetzen. Aber somit haben die Neutronen weniger Zeit für einen β -Zerfall, das n/p -Verhältnis ist größer als $1/7$. Die Folge

ist eine höhere Heliumproduktion, und damit ein zunehmendes Y_4 .

Die Vorkommnisse der anderen leichten Elemente hängen in ähnlicher Weise von η , aber auch von der mittleren Lebenszeit τ_n des Neutrons, und der Anzahl der Neutrinofamilien $F_\nu \approx 3$ ab. Mit Gl. (5.34), in die noch eine Proportionalitätskonstante A eingeführt wird, folgt für die Temperatur T_d zum Zeitpunkt des Entkoppelns, also wenn die Reaktionsrate gleich der Expansionsrate ist,

$$T_d = A^{-1/3}. \quad (6.29)$$

Aus der Abhängigkeit von der Proportionalitätskonstanten A folgt, daß eine längere Lebensdauer der Neutronen einen früheren Zeitpunkt der Entkopplung impliziert.

Die Expansionsrate H des Universums hängt über $\sqrt{g_{\text{eff}}}$ mit der Anzahl der Neutrinofamilien F_ν zusammen. Sie würde mit mehr als drei Familien, oder einer unterschiedlichen Anzahl von Neutrino- und Antineutrino-Familien zunehmen. Bis 1990 beschränkte die Menge an ^4He die Anzahl F_ν auf $3 \dots 5$. Durch Experimente am LEP (Large Electron-Positron) Beschleuniger am CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucleaire) bei Genf konnte F_ν auf 3 festgelegt werden.

In Abbildung 6.4 ist der Überschuß verschiedener Nukleonen im Verhältnis zu ^1H über dem Verhältnis von Baryonen zu Photonen η aufgetragen. Die Kurven stellen die Vorhersagen der Primordialen Nukleosynthese dar. Die schraffierten Bereiche hingegen sind durch experimentelle Beobachtungen ausgeschlossen. Zieht man alle Kurven in die Diskussion mit ein, so bleibt letztendlich ein Bereich

$$2.8 \leq 10^{10} \eta \leq 4.2 \quad (6.30)$$

übrig, in dem F_ν und τ_n mit dem Urknallmodell konsistent sind.

Mit dem Wert von η aus der Nukleosynthese kann man die Dichteparameter Ω_B für Baryonen abschätzen. Die Anzahldichte der Photonen im CMB ist $N_\gamma = 410 \text{ Photonen/cm}^3$. Wird dies in die Gln. (6.10) und (6.11) eingesetzt, so folgt mit der Protonenmasse m_B

$$\Omega_B = \frac{N_B m_B}{\rho_c} = \frac{N_\gamma m_B}{\rho_c} \approx 3.65 \times 10^7 \eta h^{-2} \quad (6.31)$$

Mit Gl. (6.30) und $h = 0.5 \dots 0.85$ ergeben sich die Werte

$$0.01 \leq \Omega_B \leq 0.05 \quad (6.32)$$

Bestimmt man die Masse des Universums mittels der sichtbaren, und damit baryonischen Materie, so folgt daraus ein Massendefizit: *Es gibt zu wenig baryonische Materie, um das Universum zu schließen.* Somit ist das Universum also entweder tatsächlich offen, oder es muß eine andere, nicht-baryonische Materie existieren.

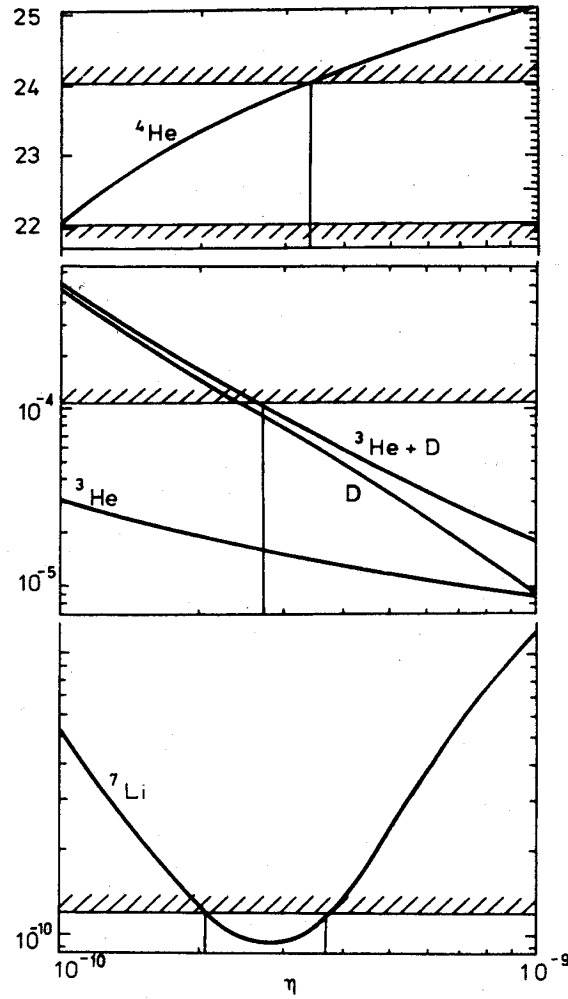


Abbildung 6.4: Massenanteile in Abhängigkeit des Baryon zu Photon Verhältnisses η .

6.4 Übungen

1. Berechnen Sie den auf die Strahlung zurückzuführenden Druck mit Hilfe der heutigen Energiedichte der Strahlung.
2. Zeigen Sie, daß ein Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit β in Richtung θ relativ zum CMB bewegt, das Schwarzkörper-Spektrum mit der Temperatur T im Ruhesystem als ein Schwarzkörper-Spektrum mit der Temperatur

$$T' = \frac{T}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \quad (6.33)$$

sieht. Bis zur ersten Ordnung in β entspricht dies der Dipol-Anisotropie

(6.8).

3. Die Dipol-Anisotropie wird mit $1.2 \times 10^{-3} T_0$ gemessen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Erde relativ zum mitbewegten Koordinatensystem.
4. Wie groß sind die maximalen Dichtefluktuationen, um mittels

$$\frac{\delta T}{T} \simeq \frac{1}{3} \left(\frac{L_{dec}}{ct_{dec}} \right)^2 \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (6.34)$$

die *Große Wand* der Länge $170 h^{-1} \text{ Mpc}$ zu ermöglichen? L_{dec} ist dabei die Größe der Struktur zur Zeit der Entkopplung t_{dec} . Die Obergrenze $\delta T/T \leq 7 \times 10^{-6}$ sei gegeben. Warum kann man $\delta \rho/\rho$ hier nicht mit den COBE-Ergebnissen für die Anisotropie berechnen?

5. Freie Nukleonen werden bis zu einer Energie von 0.07 MeV den Deuteronen vorgezogen. Wie groß ist das Verhältnis der Anzahl der Photonen, deren Energien die Bindungsenergie des Deuteron von 2.22 MeV übersteigt, zu der Anzahl der Protonen bei 0.07 MeV ?

Kapitel 7

Teilchenphysik

7.1 Spinraum in der Quantenmechanik

7.1.1 Einführung

Die Anzahl der Spinzustände n_{spin} eines Teilchens war nach Gl. (5.27) ein Faktor bei der Diskussion des Freiheitsgrades g im thermischen Gleichgewicht. Beispielsweise wurden Photonen verschiedener Polarisierung als unterschiedliche Teilchen aufgefaßt.

Geladene Teilchen mit einem magnetischen Moment richten sich in einem Magnetfeld aus. Obgleich es sich hier um einen quantenmechanischen Effekt handelt, ist das klassische Bild hierfür eine Elektrische Ladung, die um eine Achse parallel (oder antiparallel) zum externen Magnetfeld rotiert. Sei diese Achse durch den *Spinvektor* $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$, und das externe Magnetfeld durch $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ gegeben. Die potentielle Energie, bedingt durch die magnetische Kopplung, ist dann der *Hamiltonoperator*

$$H = A \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = A S_z B_z, \quad (7.1)$$

wobei A eine Konstante ist. Messungen von H ergeben, daß S_z *quantisiert* ist.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma} \quad \sigma_z = \pm 1 \quad (7.2)$$

Das unterschiedliche Vorzeichen entspricht dem klassischen Bild paralleler und antiparalleler Ausrichtung, respektive rechts- und linkshändigem Spin. Die Quantisierung kann jedoch klassisch nicht erklärt werden.

Außerdem wird das quantenmechanische Teilchen bei jeder experimentellen Bestimmung des Spins durch das notwendige externe Magnetfeld ausgerichtet. Ein beobachtetes Teilchen kann also immer nur die zwei Zustände (7.1) haben. Über den Zustand *vor* der Beobachtung kann keine Aussage gemacht werden. Es läßt sich jedoch eine Wahrscheinlichkeit P angeben, mit der das Teilchen den Zustand $\sigma_z = 1$ *nach* der Beobachtung einnehmen wird. Nach der Definition einer Wahrscheinlichkeit ist diese für den Zustand $\sigma_z = -1$ dann $P - 1$.

Definierte Spinzustände haben die Werte $\sigma_z = \pm 1$. Undefinierte Zustände sind eine *Superposition* dieser beiden, welche geometrisch oder algebraisch ausgedrückt werden kann.

7.1.2 Geometrische Betrachtung

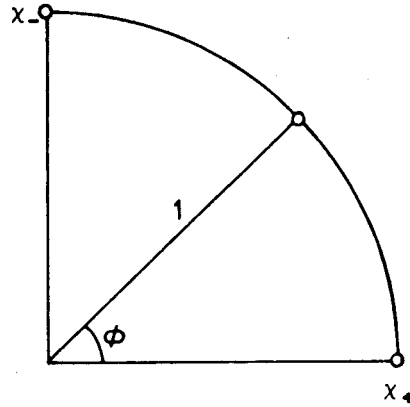


Abbildung 7.1: Zweikomponenten Spinraum

Betrachten wir einen abstrakten, zweidimensionalen Raum mit den orthogonalen Achsen χ_+ und χ_- . Mit dem Einheitskreis in Abbildung 7.1 gilt für die Koordinaten $\chi = (\cos \phi, \sin \phi)$, und damit nach Definition für die Wahrscheinlichkeit $P = \cos^2 \phi$ und $1 - P = \sin^2 \phi$. In dieser Darstellung kann jeder Spinzustand durch Ursprungsvektoren zum Einheitskreis hin, den *Spinoren*, dargestellt werden.

$$\chi = \cos \phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Die Punkte auf dem Kreisbogen sind also mögliche Zustände vor einer Messung, und die Schnittpunkte desselben mit den Achsen jene nach einer Messung. Alle anderen Punkte haben keine physikalische Bedeutung. Die Dimension dieses abstrakten Spinraumes ist durch die Anzahl der Spinoren χ gegeben, und nicht durch die Vektoren $\mathbf{S}$ oder σ , die immer dreidimensional sind!

7.1.3 Algebraische Betrachtung

Algebraisch kann die Rotation eines Spinors χ_1 in einen Spinor χ_2 durch einen Operator U ausgedrückt werden, der auf χ_1 wirkt.

$$\chi_2 = U \chi_1 \quad (7.4)$$

Da U auf alle Komponenten von χ_1 wirken muß, wird er durch eine $(n \times n)$ -Matrix beschrieben. Den speziellen Operator S_+ mit

$$S_+ \chi_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \chi_+ \quad (7.5)$$

bezeichnet man als *Aufsteigeoperator*, bzw. den Operator S_- als *Absteigeoperator*.

Da die Winkel im geometrischen Bild keine physikalische Bedeutung haben, werden sie besser durch die komplexen Zahlen

$$a_+ = a e^{i\alpha} \quad a_- = b e^{i\beta} \quad (7.6)$$

ausgedrückt. Die Größen a und b sind reelle Zahlen mit den Eigenschaften

$$|a_+|^2 + |a_-|^2 = a^2 + b^2 = 1 \quad 0 \leq |a_{\pm}| \leq 1. \quad (7.7)$$

Die Winkel α und β müssen keine physikalische Bedeutung haben. Es gilt

$$P = |a_+|^2 \quad 1 - P = |a_-|^2. \quad (7.8)$$

Die komplexe Darstellung verkörpert das quantenmechanische *Prinzip der Superposition*, welches folgende Aussage hat.

Wenn die Spinoren χ_+ und χ_- einen physikalischen Zustand beschreiben, so beschreibt auch jede lineare Superposition mit den komplexen Koeffizienten $a_{\pm}$ mit $\chi = a_+ \chi_+ + a_- \chi_-$ von diesen, einen physikalischen Zustand.

Dies erfordert einerseits einen komplexen Operator U . Andererseits muß dieser nach den Gln. (7.4) und (7.7) auch *unitär* sein, damit ein Punkt auf dem Kreisbogen in Abbildung 7.1 wieder auf diesen abgebildet wird.

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \quad (7.9)$$

7.2 Gruppentheorie

7.2.1 Eichtransformationen

Ein Beispiel für einen solchen unitären Operator wäre die Phasentransformation

$$U = e^{i\theta \cdot 1}. \quad (7.10)$$

Operatoren dieser Form gehören alle der *Gruppe* $U(1)$ an, wobei U für Unitarität, und (1) für die Ordnung der Gruppe steht. Der Phasenwinkel θ ist ein reeller Parameter der Gruppe, der einen global gültigen Wert über die gesamte Raumzeit hat. Gleichung (7.8) ist deshalb eine *globale Eichtransformation*.

Die Maxwellgleichungen sind beispielsweise invariant unter einer Phasentransformation

$$U = e^{iQ\theta(x)}. \quad (7.11)$$

Die elektrische Ladung Q ist dabei eine Erhaltungsgröße. Die $U(1)$ Symmetrie verlangt, daß die Maxwellgleichungen unabhängig von der Wahl der Variablen $\theta(x)$ im Gruppenparameter $Q\theta(x)$ sind. Da diese Eichsymmetrie exakt ist, ist das *Eichboson* dieser Theorie, das Photon, masselos.

Aus Gl. (7.9) folgt, daß

$$\det U = 1, \quad (7.12)$$

und somit, daß die Gruppe ein Element der globalen Gruppe $SU(2)$ ist. S steht dabei für Spezielle Bedingung.

7.2.2 Nichtkommutative Algebra

Der Operator U kann auch durch

$$U = e^{iH} \quad (7.13)$$

ausgedrückt werden. Wird Gl. (7.10) in Gl. (7.9) eingesetzt, so folgt daraus, daß H *hermitesch* sein muß.

$$H = H^\dagger \quad (7.14)$$

Gl. (7.9) impliziert, daß die Spur von H verschwinden muß. Die Matrix H kann deshalb mit den *Pauli-Matrizen*

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

als

$$H = \theta_1 \sigma_x + \theta_2 \sigma_y + \theta_3 \sigma_z \quad (7.16)$$

geschrieben werden.

Die Zahl 1 in $SU(1)$ ist die Spur der Pauli-Matrizen in $SU(2)$. Sie generiert eine *abelsche Algebra*,

$$\theta_1 \theta_2 - \theta_2 \theta_1 = [\theta_1, \theta_2] = 0, \quad (7.17)$$

während hingegen die Pauli-Matrizen eine neue *nichtkommutative Algebra*

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sigma_k \quad (7.18)$$

erzeugen. Die i, j, k sind eine zyklische Vertauschung der x, y, z . Der *Antikommutator*

$$\sigma_i, \sigma_j \equiv \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i \quad (7.19)$$

verschwindet für ein beliebiges Paar von Pauli-Matrizen.

Die *Beobachtung* beispielsweise eines Spins eines Elektrons wird durch einen *Operator* S beschrieben, der auf den Zustand χ_1 des Spins wirkt. Das numerische *Ergebnis* ist dann s .

$$S \chi_1 = s \chi_2 \quad (7.20)$$

Ist der Operator eine diagonale Matrix wie

$$S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar \sigma_z, \quad (7.21)$$

impliziert dies physikalisch eine Messung des Spins in z -Richtung, und führt zu den *Eigenwertgleichungen*

$$S_z \chi_+ = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \chi_+, \quad (7.22)$$

$$S_z \chi_- = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \hbar \chi_-, \quad (7.23)$$

wobei die Spinoren $\chi_{\pm}$ die *Eigenzustände* des Operators S_z , und die Zahlen s_z seine *Eigenwerte* sind. Wegen Gl. (7.21) ist die Länge von $S \equiv |\mathbf{S}| = \frac{1}{2} \hbar$, und seine Ausrichtung parallel oder antiparallel zur z -Achse.

Physikalische Beobachtungen sind also lineare (Spinraum $\rightarrow$ Spinraum) Operatoren, die durch n -dimensionale diagonale Matrizen ausgedrückt werden, wobei n die Anzahl der möglichen Ergebnisse der Beobachtung ist.

7.2.3 Vertauschungsinvarianz

Die Summe

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_a + \mathbf{S}_b \quad (7.24)$$

der Spinvektoren zweier Elektronen a und b mit den Spinnorzuständen χ_+^a , χ_-^a , χ_+^b , χ_-^b , kann jeden Wert $0 \dots 1 \cdot \hbar$ annehmen. Die Quantenmechanik fordert aber ein ganzzahliges Vielfaches von $\hbar$, was wichtige Konsequenzen für die Atom- und Teilchenphysik mitbringt.

Die Projektion $|S, s_z\rangle$ kann für einen Zwei-Elektronen Spinzustand die Werte $s_z = 0$ für $S = 0$ und $s_z = \pm 1$ für $S = 1$ annehmen.

$$|1, 1\rangle, \quad |1, 0\rangle, \quad |1, -1\rangle \quad (7.25)$$

Diese Zustände können durch die Ein-Elektronen Zustände

$$|1, 1\rangle = \chi_+^a \chi_+^b, \quad |1, -1\rangle = \chi_-^a \chi_-^b, \quad |1, 0\rangle = \chi_{\pm}^a \chi_{\mp}^b, \quad |0, 0\rangle = \chi_{\mp}^a \chi_{\pm}^b \quad (7.26)$$

ausgedrückt werden. Das Problem der Uneindeutigkeit bei $S = 0$ wird durch eine Symmetrie, nämlich der *Vertauschungsinvarianz* bezüglich zweier *identischer Teilchen* (Hier: a und b), gelöst. Die jeweiligen Gleichungen in (7.26) können in einen symmetrischen Anteil

$$|1, 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (\chi_+^a \chi_-^b + \chi_-^a \chi_+^b), \quad (7.27)$$

und einen antisymmetrischen Anteil

$$|0, 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (\chi_+^a \chi_-^b - \chi_-^a \chi_+^b) \quad (7.28)$$

umgeschrieben werden. Physikalisch bedeuten diese linearen Superpositionen, daß die Beobachtungen der Spins mit gleicher Wahrscheinlichkeit nur entweder $\chi_+^a \chi_-^b$ oder $\chi_-^a \chi_+^b$ ergeben, unabhängig davon, in welchem der beiden Zustände (7.27) oder (7.28) sich das System befindet. Aus der Wurzel ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür zu $P = \frac{1}{2}$, wodurch insgesamt alle Zustände (7.26) mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufzufinden sein werden.

7.2.4 Ladungsoperator

Proton und Neutron haben unterschiedliche Ladungen und magnetische Momente. Könnten wir die schwache Wechselwirkung “abschalten”, und nur noch die *starke Wechselwirkung* betrachten, so wären sie bis auf eine kleine Massendifferenz, welche aber noch als elektromagnetischer Effekt erklärt werden könnte, identische Teilchen. Ein Nukleon wäre dann ein Zweikomponenten-Zustand im abstrakten *Ladungsraum* mit den Basisvektoren $\mathbf{p}$ und $\mathbf{n}$.

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

Analog zur Diskussion des Spins, sind dies Eigenzustände eines Operators $I_3 = \frac{1}{2} \sigma_z$, mit Eigenwerten

$$I_3 = \pm \frac{1}{2}. \quad (7.30)$$

Das Proton mit der Ladung $Q = +1$ hat somit $I_3 = +\frac{1}{2}$, und das Neutron $I_3 = -\frac{1}{2}$. Der *Ladungsoperator* lautet in Matrixform

$$Q = \frac{1}{2} + I_3 \quad (7.31)$$

und in Matrixform

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

7.2.5 Isospin

Analog können zwei weitere Operatoren I_1 und I_2 definiert werden, die mit den Ladungszuständen wechselwirken.

$$I_1 N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \quad (7.33)$$

Im Gegensatz zum Spin, wo σ ein Vektor im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum ist, sind die $I_{1,2,3}$ Komponenten des *Isospin-Vektors* $\mathbf{I}$ im abstrakten dreidimensionalen Raum.

Der Vorteil dieser Darstellung ist, daß sowohl die starke Wechselwirkung von Protonen und Neutronen, als auch ihre linearen Superposition, stets symmetrisch sind. Die starke Wechselwirkung besitzt *Isospin-Symmetrie*. Dies gilt jedoch nicht für die elektromagnetische Wechselwirkung, da diese in der Natur nicht vernachlässigt werden kann, wie es hier zuvor geschehen ist.

7.2.6 Schwache Ladung

Um auch Massendifferenzen in Betracht ziehen zu können, schreiben wir die Leptonen als Komponenten dreier $SU(2)$ Doublets.

$$\ell_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad , \quad \ell_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad , \quad \ell_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad . \quad (7.34)$$

Die Antiteilchen formen analoge Doublets, jedoch ist die up/down Reihenfolge vertauscht. Insgesamt erhält man einen *schwachen Isospinraum*, der in der algebraischen Struktur dem Spinraum, bzw. Isospinraum ähnelt, und von den Basisvektoren

$$\nu_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

aufgespannt wird. Dies sind Eigenzustände eines Operators

$$T_3 = \frac{1}{2} \sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (7.36)$$

Die Eigenwerte $T_3 = \pm \frac{1}{2}$ nennt man *schwache Ladung*.

7.2.7 Schwache Hyperladung

In der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung werden Teilchen durch lokale *Eichfelder* ausgedrückt. Die Eichsymmetrie wird durch das Produkt

$$SU(2)_w \otimes U(1)_Y$$

der lokalen Symmetriegruppen des Isospins und der *Schwachen Hyperladung* mit der Quantenzahl Y , wobei

$$\frac{1}{2}Y = Q - T_3, \quad (7.37)$$

ergänzt.

Aus der Tatsache, daß diese Symmetrie in der Natur beobachtet werden kann, läßt sich schließen, daß die elektroschwache Wechselwirkung kein Unterschied zwischen Neutrino- und Elektronfelder und linearen Superpositionen selbiger sieht. Da die Symmetrie lokal ist, sind die die elektroschwache Wechselwirkung bestimmenden Gesetze unabhängig von der Wahl der lokalen Eichfunktionen.

Da von den vier Eichbosonen γ, Z^0, W^+, W^- nur das Photon masselos ist, spricht man von einer *gebrochenen Symmetrie*.

7.3 Quarkmodell

7.3.1 Flavour

Hadronen, also Baryonen (qqq) und Mesonen ($q\bar{q}$), wechselwirken mit einer typischen Lebensdauer von 10^{-16} s immer schwach, geladene Hadronen unterliegen zusätzlich der elektromagnetischen Wechselwirkung. Diese werden jedoch immer von starken Wechselwirkungen mit einer Lebensdauer von 10^{-23} s dominiert.

Das mannigfaltige Spektrum hadronischer Reaktionen kann durch die Forderung einer Isospin-Symmetrie vereinfacht werden. 1962 wurde jedoch gezeigt, daß diese Symmetrie noch nicht ausreichend ist. Hadronen können nämlich aus drei hypothetischen Zuständen, den *Quarks* $q = u, d, s$ gebildet werden. Dieser dreidimensionale Raum mit der Eichsymmetrie $SU(3)$ ist eine Erweiterung des $SU(2)$ um eine zusätzliche Quantenzahl, der *Strangeness* mit dem Zustand s . Zusammen mit den *up*- und *down*-Quarks gibt es also drei *Flavours*. Die Konfigurationen der nukleonischen Grundzustände sind

$$p = uud \quad n = udd \quad (7.38)$$

und die der mesonischen Grundzustände

$$\begin{aligned} \pi^+ &= u\bar{d} & \pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) & \pi^- &= d\bar{u} \\ K^+ &= u\bar{s} & K^0 &= d\bar{s}. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Die fundamentale Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung benötigt zur Vervollständigung eines zweiten $SU(2)_w$ -Doublets mit dem s -Quark einen vierten Flavour. 1974 wurde dieses lange vorhergesagte *charm*-Quark c gleichzeitig von Teams am MIT und SLAC entdeckt.

Die Entdeckung des τ -Leptons am SLAC in den folgenden Jahren legte die Anzahl der Lepton-Familien auf drei fest. 1977 wurde schließlich am e^+e^- -Collider CESAR das fünfte Quark mit der gleichen Ladung wie d und s , aber vom Flavour *bottom* gefunden. Fantasiereichere Zeitgenossen nennen dieses auch *beauty*. Mit dem *top*-Quark als bisher noch nicht entdeckten Partner im dritten $SU(2)_w$ -Doublet können die drei Quark-Familien schließlich wie folgt dargestellt werden.

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

Die Symmetrie der starken Wechselwirkung könnte logischerweise zur $SU(n)$ für Quarks mit n verschiedenen Flavours erweitert werden. Jedoch sind die Massen der Quarks so unterschiedlich, daß schon die $SU(4)$ gebrochen wäre.

7.3.2 Ladung

Quarks besitzen die Baryonenzahl $B = \frac{1}{3}$ (Gl. 7.38). Aus der $SU(2)_w$ folgt, daß alle Zustände $T_3 = \frac{1}{2}$ die Ladung Q_u , bzw. analog alle $T_3 = -\frac{1}{2}$ die Ladung Q_d haben.

$$2Q_u + Q_d = 1 \quad Q_u + 2Q_d = 0 \quad (7.41)$$

Die tatsächliche Verteilung ist

$$Q_u = \frac{2}{3} \quad Q_d = -\frac{1}{3} \quad (7.42)$$

Aus Gl.(7.37) folgt für die schwache Hyperladung

$$Y_d = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}. \quad (7.43)$$

Quarks unterscheiden sich also nur durch die schwache Hyperladung von den Leptonen. Mit der Leptonenzahl L folgt

$$Y_l = B - L = -1. \quad (7.44)$$

7.3.3 Farbe

Aus spektroskopischen Untersuchungen hadronischer Reaktionen folgt zwingend, daß ein Quark in drei unterschiedlichen Modifikationen vorkommen muß, was einen weiteren Unterschied zu den Leptonen darstellt. Da diese Modifikationen in keinem Zusammenhang mit den bisher diskutierten Eigenschaften stehen, weißt man ihnen eine neue Größe, nämlich die sogenannte *Farbe* zu. Diese spannt einen abstrakten dreidimensionalen Raum mit der Symmetrie $SU(3)_c$ auf. Die Basisvektoren sind

$$q_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7.45)$$

wobei R, B, Y hier exemplarisch für Rot, Blau und Gelb, sowie q für die Flavours u, d, c, s, t, b stehen.

Die Farbe ist eine absolut erhaltene Quantenzahl. (Zur Erinnerung: Flavour bei schwacher Wechselwirkung gebrochen.) Das *Gluon*, ein Vektorboson, verantwortlich für die Bindung von Quarks an Hadronen, muß somit auch eine Farbe haben, da es mit Leptonen nicht wechselwirkt. Damit können die Gluonen, im Gegensatz zu Photonen, die keinerlei Ladung tragen, auch untereinander wechselwirken.

Da es drei „verschiedenfarbige“ Quarks gibt, müssen, damit jedes Farbpaar angesprochen werden kann, neun Gluonen existieren. Die Linearkombinationen $RR, B\bar{B}, Y\bar{Y}$ sind jedoch alle farbneutral und total antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Farben, weshalb die Gruppentheorie, die nur acht verschiedene Gluonen erlaubt, nicht verletzt wird.

Es sei angemerkt, daß noch nie freie Quarks im Labor beobachtet wurden. Dennoch ist dieses Verhalten nach den Eigenschaften des Vakuums sehr natürlich. Beispielsweise kann in dieser Hinsicht das Quark-Antiquark-Paar in einem Meson mit den Polen eines Magneten verglichen werden. Zerbricht man den Magneten, so erhält man ein neues Polpaar. Die zwei neu hinzugekommenen Pole an der Bruchstelle wurden also aus dem Vakuum heraus produziert. Ganz analog erhält man beim „Aufbrechen“ eines $q\bar{q}$ -Paares zwei neue Mesonen aus dem Vakuum. Je größer die Distanz zweier Quarks also ist, desto größer ist ihr Bindungspotential. Oder umgekehrt können Quarks mit minimalem Abstand im wesentlichen als frei angesehen werden! (*Asymptotische Freiheit*)

Mesonen, bestehend aus einer von drei Farben und der entsprechenden Antifarbe, sind farbneutral. Aber auch bei Hadronen wurde die Farbeigenschaft noch nie beobachtet, weshalb auch diese farbneutral sein müssen. Dies ergibt sich bei einer total antisymmetrischen Linearkombination dreier Quarks q, q', q'' . Damit folgt verallgemeinert aus Gl. (7.28)

$$\frac{1}{\sqrt{6}} (q_R q'_Y q''_B - q_R q'_B q''_Y + q_B q'_R q''_Y - q_B q'_Y q''_R + q_Y q'_B q''_R - q_Y q'_R q''_B) . \quad (7.46)$$

Wegen (7.45) müssen Operatoren der $SU(3)$ 3×3 -Matrizen sein. Jede spurlose hermitesche 3×3 -Matrix kann als Linearkombination von acht Matrizen λ_i geschrieben werden (Pauli-Matrizen), von denen zwei diagonal sind (zwei Observable). Mit der *Strukturkonstanten* c_{ijk} folgt

$$[\lambda_i, \lambda_j] = c_{ijk} \lambda_k . \quad (7.47)$$

Das direkte Produkt aus der Symmetrie des Farbraumes (7.45) mit der elektroschwachen Symmetrie führt zu einer globalen Symmetrie gluonischer Wechselwirkungen von Quarks und elektroschwacher Wechselwirkungen von Leptonen und Quarks.

$$\mathrm{SU}(3)_c \otimes \mathrm{SU}(2)_w \otimes \mathrm{U}(1)_{B-L} \quad (7.48)$$

Dies stellt das *Standardmodell der Teilchenphysik* (Nicht das der Kosmologie!) dar, welches eine fundamentale Rolle bei der Diskussion des primordialen Universums spielen wird.

Kapitel 8

Symmetrien

8.1 Diskrete Symmetrien (C, P, T)

8.1.1 Parität

Physikalische Gesetze sollten von der Wahl der Koordinaten der Raumzeit unabhängig sein. Genauer gesagt sind sie translations- und rotationssymmetrisch. Translationen und Rotationen sind hier stetige Transformationen in dem Sinn, daß sie aus endlich vielen infinitesimalen Transformationen zusammengesetzt werden können.

Bei der Transformation eines rechtshändigen Koordinatensystems in ein linkshändiges oder umgekehrt ($x, y, z \leftrightarrow -x, -y, -z$) handelt es sich demnach um eine *diskrete Transformation*. Die Spiegelung im Dreidimensionalen nennt man *Paritätstransformation*, den dazugehörigen Operator *Paritätsoperator* P .

$$P \mathbf{v} = -\mathbf{v} \quad (8.1)$$

Der Vektor $\mathbf{v}$ ist dabei ein *Eigenvektor* von P mit dem Eigenwert $P = -1$. Eine Funktion $f(\mathbf{r})$ des Ortsvektors $\mathbf{r}$ wird durch P in

$$P f(\mathbf{r}) = f(-\mathbf{r}) \quad (8.2)$$

transformiert. Sei $f(\mathbf{r})$ eine skalare Funktion, welche unter der Paritätstransformation

$$\begin{array}{ll} \text{entweder symmetrisch} & : \quad f(-\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \\ \text{oder antisymmetrisch} & : \quad f(-\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) \end{array}$$

ist, dann ist (8.2) eine Eigenwertgleichung mit der *Eigenfunktion* $f(\mathbf{r})$ von P , welche den Eigenwert $P = \pm 1$ besitzt. Skalare können unter P also entweder der *geraden Parität* $P = +1$ entsprechend (*Skalare*), oder der *ungeraden Parität* $P = -1$ entsprechend (*Pseudoskalare*) transformieren.

Alle Teilchen transformieren unter P in einer bestimmten Art, nämlich in Form eines Skalars, Pseudoskalars, Vektors, oder etwas anderem. Sind die Teilchen Eigenzustände von P , so ist die *Parität* $P = \pm 1$ eine ihnen zugehörige Eigenschaft. Bosonen sind Eigenzustände von P , Fermionen wegen ihrer Natur als Spinor jedoch nicht. Fermion-Antifermion-Paare wiederum sind Eigenzustände ungerader Parität $P = -1$.

Sowohl starke, als auch elektromagnetische Wechselwirkungen erhalten die Parität. In einem gänzlich paritätserhaltenden Universum wäre es jedoch unmöglich zu sagen, welche Richtung links, und welche rechts ist. 1957 hat sich schließlich herausgestellt, daß schwache Wechselwirkungen die links-rechts-Symmetrie maximal verletzen, da sich die innere Parität eines Teilchens ändern kann. Die absolute Richtung kann also jederzeit durch ein β -Zerfallsexperiment festgestellt werden.

8.1.2 Helizität

Eine Konsequenz dieser maximalen Verletzung ist die *Helizität* H der Neutrinos.

$$H = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (8.3)$$

Neutrinos sind immer (!!!) linkshändig ($\mathbf{S} \uparrow \downarrow \mathbf{p}$), ihre Helizität ist $H = -1$. Würde man sie aus einem Bezugssystem beobachten, das schneller als sie selbst flöge, so würde sich ihr Momentenvektor umkehren und ihre Helizität wäre positiv. Neutrinos sind masselos — nehmen wir es zumindest mal an — und bewegen sich somit mit Lichtgeschwindigkeit, was sie als linkshändig festlegt. Die Natur ist also nicht symmetrisch! In Analogie sind Antineutrinos immer rechtshändig.

Da keine andersartigen Neutrinos, bzw. Antineutrinos beobachtet wurden, können sie auch nicht der schwachen Wechselwirkung unterliegen. Sie sind T_3 -neutrale $SU(2)_w$ -Singlets. Damit erweitert sich die Familie der Elektronen/Antielektronen zu

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad (\nu_e)_R \quad (e^-)_R \quad , \quad (8.4)$$

$$\begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}_R \quad (\bar{\nu}_e)_L \quad (e^+)_L \quad . \quad (8.5)$$

Dies gilt auch für die Familien der μ und τ .

Obleich „falschhändige“ Elektronen und Positronen existieren, sind, da sie massenbehaftet sind, ihre Wechselwirkungen stark unterdrückt.

Analoges gilt für Quarks, und mit den ergänzenden Singlets ergibt sich

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (u)_R \quad (d)_R \quad , \quad (8.6)$$

sowie Entsprechendes für die beiden schwereren Familien.

8.1.3 Ladungskonjugation

Die *Ladungskonjugation* C , angewendet auf ein Teilchen, überführt dies in sein eigenes Antiteilchen. Bei flavourlosen Bosonen wie dem Pion ändert sich dabei lediglich die Ladung.

$$C\pi^+ = \pi^- \quad (8.7)$$

Geladene Pionen sind im Gegensatz zu den π^0 also keine Eigenzustände von C , welche die Vorzeichen aller Flavours, Leptonenzahlen und Baryonenzahlen umkehren.

Sowohl die Ladungskonjugation, als auch der Paritätsoperator machen bei Neutrinos nicht viel Sinn, da jeweils die unbeobachteten Zustände resultieren.

$$C\nu_L = \bar{\nu}_L \quad (8.8)$$

$$P\nu_L = \nu_R \quad (8.9)$$

Beide Operationen in Kombination ergeben jedoch wieder bekannte Zustände.

$$CP\nu_L = C\nu_R = \bar{\nu}_R \quad (8.10)$$

Die schwache Wechselwirkung ist bis auf 0.22 % symmetrisch unter CP . Diese kleine Verletzung wurde bei Kaonen festgestellt, ist aber noch nicht gänzlich verstanden. Im nächsten Kapitel wird jedoch deutlich werden, daß dieser winzige Effekt eine fundamentale Bedeutung in der Kosmologie hat. Die starke Wechselwirkung verletzt die CP gleichermaßen mit unterschiedlichem Vorzeichen, so daß die tatsächliche Verletzungsrate kleiner als 10^{-9} ist. Der Grund hierfür ist auch noch unbekannt.

8.1.4 Zeitumkehr

Die dritte wichtige diskrete Symmetrie ist die Symmetrie unter Umkehr des Zeitpfeiles, oder die *Zeitumkehr* T . Analog zur Parität bezüglich des Raumes, ist T spiegelsymmetrisch zur Zeitachse. Alle physikalischen Gesetze reversibler Prozesse sind so formuliert, daß die Zeitumkehr $t \leftrightarrow -t$ keine beobachtbaren Effekte bewirkt.

Die Zeitumkehr spielt vor allem in Verbindung mit der kombinierten CPT -Symmetrie eine wichtige Rolle. Diese sagt bezüglich einer Teilchenreaktion aus, daß ein in Richtung $\mathbf{z}$ *einfliegendes linkshändiges Teilchen* äquivalent zu einem in $\mathbf{z}$ *ausfliegenden rechtshändigen Antiteilchen* ist. Eine Konsequenz daraus ist die Gleichheit der Massen von Teilchen und Antiteilchen. Sind die beiden Partner instabil, so müssen sie auch die gleiche Lebensdauer haben.

Ein grundlegender Begriff der theoretischen Physik ist die Vollkommenheit der CPT. Da die CP aber leicht verletzt ist, muß folglich auch T in gleichem Maße mit entgegengesetztem Vorzeichen verletzt sein. Viele Experimente beschäftigen sich, unter stets steigenden Anforderungen an die Präzision der Messungen, mit der CPT-Symmetrie, der CP-Symmetrie und der T-Symmetrie.

8.2 Spontane Symmetriebrechung

Da eigentlich nur wenige Symmetrien als exakt beobachtet werden, ist die Symmetriebrechung ein offensichtlich wichtiger Mechanismus. Zum Verständnis der *spontanen Brechung von Teilchensymmetrien* seien einige Beispiele genannt.

8.2.1 Beispiele

Ein zylindrischer Stab steht senkrecht auf einer horizontalen Oberfläche. Auf sein oberes Ende wirkt eine vertikale Kraft nach unten. Bezüglich einer Rotation um die vertikale Stabachse ist das System symmetrisch. Wird die Kraft so groß, daß sich der Stab durchbiegt, so ist die Zylindersymmetrie gebrochen.

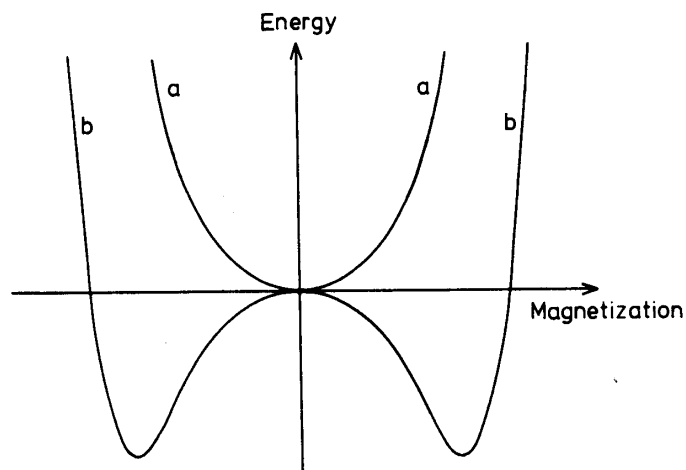


Abbildung 8.1: Potential in Abhängigkeit der Magnetisierung eines Stabmagneten oberhalb (a) und unterhalb (b) der Curietemperatur

Ein eisener Stabmagnet verliert oberhalb der Curietemperatur von 770°C seine Magnetisierung. Die zufällige Ausrichtung aller Elementarmagnete entspricht einem Minimum in der potentiellen Energie beim Verschwinden der Magnetisierung (Abb. 8.1a). Somit besitzt dieser Magnet jetzt volle Rotationssymmetrie. Die entsprechende Gruppe ist die $O(3)$ für orthogonale Rotationen im dreidimensionalen Raum.

Sinkt die Temperatur unter 770°C , so wird die Symmetrie spontan gebrochen. Der entsprechende Verlauf der potentiellen Energie ist in Abb. (8.1b) dargestellt.

(Polynom mindestens vierter Ordnung). Sie hat zwei tiefere Minima, die symmetrisch zum Punkt keiner Magnetisierung sind, und den Nord-, bzw. Südpol repräsentieren. Der Grundzustand des Stabmagneten ist jetzt eines dieser Minima. Die zuvor verschwundene makroskopische Magnetisierung stellt sich deshalb wieder ein.

Als drittes Beispiel sei ein Skalarfeld $\phi(x)$ im Vakuum gegeben, wobei x die Koordinate in der Raumzeit ist.

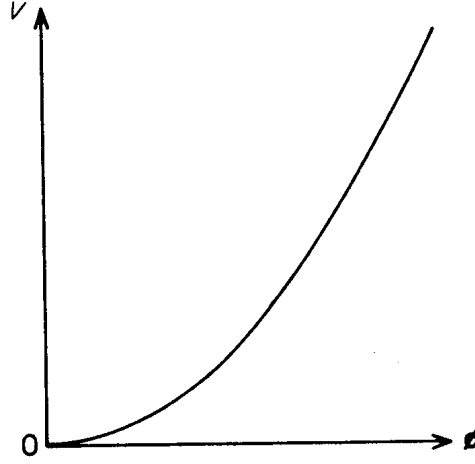


Abbildung 8.2: Potential eines reellen Skalarfeldes ϕ

Entspricht die potentielle Energie einer parabolischen Form wie in Abb.(8.2), so kann die Gesamtenergie als

$$E(\phi) = E_{kin}(\phi) + V(\phi) = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (8.11)$$

geschrieben werden.

Nach quantenmechanischer Rechnung erhält man, daß die *effektive Masse* eines Feldes tatsächlich positiv ist. Sie kann also als ein physikalisches Skalarboson interpretiert werden! Die Bosonen bewegen sich in einem Vakuum, das mit dem rein klassischen Feld ϕ_0 „gefüllt“ ist. Mit der spontanen Symmetriebrechung ändert sich also lediglich die *Masse des Skalar-Bosons*.

8.2.2 Das Higgsboson

Nehmen wir an, die $SU(2)_w \otimes U(1)$ sei exakt. Die Theorie verlangt dann vier Vektorbosonen B^0 , W^+ , W^0 , W^- , welche masselos sind. Das *Higgsfeld*

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

erhält, selbst wenn wir uns in ein Gebiet begeben, in dem die Symmetrie spontan gebrochen ist, die physikalischen Eigenschaften der Vektorbosonen. Diese

wechselwirken mit den vier reellen Komponenten ϕ_i des $SU(2)_w$ -symmetrischen Feldes ϕ . Das Vakuum entspricht dabei dem Zustand

$$\phi_1 = \phi_2 = 0 \quad \phi_3^2 + \phi_4^2 = \text{const.} > 0. \quad (8.13)$$

Dieses rotationssymmetrische Potential ist in Abb. 8.3 dargestellt.

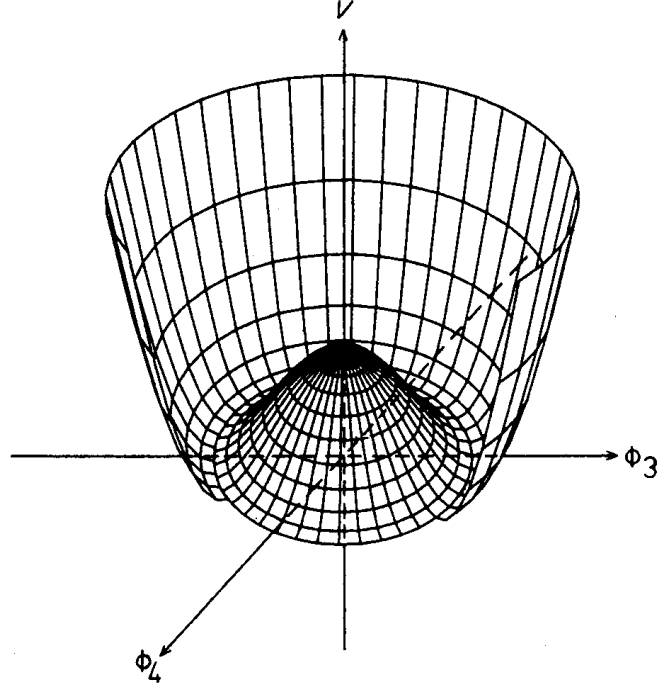


Abbildung 8.3: Higgs-Potential eines komplexen Skalarfeldes ϕ

An Punkten wie $\phi_3 > 0, \phi_4 = 0$ ist die Rotationssymmetrie spontan gebrochen, und das Skalarfeld erhält eine Masse, die einem freien *Higgsboson* im Vakuum entspricht. Als Konsequenz werden die mit dem Skalarfeld wechselwirkenden Vektorbosonen W^+, W^- massiv. Die neutralen Felder B^0, W^0 sind von der Form

$$\gamma = B^0 \cos \theta_w + W^0 \sin \theta_w, \quad (8.14)$$

$$Z^0 = -B^0 \sin \theta_w + W^0 \cos \theta_w. \quad (8.15)$$

Da γ nicht elektroschwach wechselwirkt, bleibt es masselos, wobei hingegen Z^0 massiv wird.

Das Higgsboson erklärt also die spontane Brechung der $SU(2)_w \otimes U(1)$ Symmetrie. Seine Masse ist

$$m_\phi = 2\sqrt{\lambda} \cdot 246 \text{ GeV}. \quad (8.16)$$

Der Wert von λ ist leider unbekannt, jedoch kann eine untere Massengrenze von 65 GeV angegeben werden.

8.3 Grand Unified Theory (GUT)

8.3.1 Phasenübergänge

Die Entwicklung des Universums fand in Phasen exakter und gebrochener Symmetrien statt. Die frühe Kosmologie muß deshalb durch *Phasenübergänge* beschrieben werden. Der chronologische Parameter wird hierbei die Temperatur T sein.

$$V(\phi, T, \dots) = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{\lambda T^2}{8} \phi^2 + \dots \quad (8.17)$$

Da T antiproportional zum Energieerwartungswert ϕ des Vakuums ist, gibt es eine *kritische Temperatur*

$$T_c|_{\phi=0} = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (8.18)$$

8.3.2 Die erste Mikrosekunde

$E \approx 1 \text{ GeV}$:

Es existieren lediglich Protonen und Neutronen als Quarks. Die Farbsymmetrie $SU(3)_c$ ist noch gültig, auch wenn das nicht offensichtlich ist, da Hadronen farbneutrale Singlets sind. Es scheint, daß die Farbkraft durch Mesonen, also gebundene Quarkzustände, übermittelt wird. Es gibt keinen Nachweis der schwachen Isospinsymmetrie $SU(2)_w$, die schwache und elektromagnetische Wechselwirkung sind unterschiedlich. Die Leptonenmasse variiert stark. Aus der Ladungserhaltung folgt lediglich die Exaktheit der elektromagnetischen Eichsymmetrie $U(1)$.

$1 \text{ GeV} \leq E \leq 100 \text{ GeV}$:

Mit steigender Temperatur werden sich jetzt schwache und elektromagnetische Wechselwirkung immer ähnlicher. Die vorhandenen Teilchen sind Quarks, Gluonen, Leptonen und Photonen. Alle Fermionen, unter Umständen die Neutrinos ausgenommen, sind massiv.

Die elektroschwache Symmetrie $SU(2)_w \otimes U(1)_{B-L}$ ist gebrochen. Die elektroschwache Kraft wird über masselose Photonen und virtuelle $W^\pm$ und Z^0 Vektorbosonen, die wegen ihrer zu geringen Energie aber noch nicht frei sind, übertragen. Die $SU(3)_c \otimes U(1)$ Symmetrie ist exakt, und Wechselwirkungen zwischen Quarks werden durch die Farbkraft bestimmt.

$E \approx 100 \text{ GeV}$:

Freeze-Out der W und Z , da deren Ruhemasse inzwischen erreicht ist. Ebenso fällt das Higgsboson spätestens jetzt aus.

Es gibt keinen Unterschied zwischen der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung. Es existieren jetzt allgemein Wechselwirkungen über geladene schwache Ströme (Z^0), bzw. neutrale schwache Ströme ($Z^\pm, \gamma$). Wegen zu großer Massenunterschiede ist diese Symmetrie aber nicht exakt.

$E \approx 1 \text{ TeV}$:

Da Laborexperimente heute bis zu dieser Energie reichen, scheint das bisherige Modell recht zuverlässig zu sein. Jetzt findet aber ein Phasenübergang zwischen exakter und spontan gebrochener Symmetrie $SU(2)_w \otimes U(1)_{B-L}$ statt. Das Ende der elektroschwachen Vereinigung wird dadurch markiert, daß Vektorbosonfelder, skalare Higgsfelder und Fermionfelder massiv werden.

$1 \text{ TeV} \leq E \leq 10^{14-15} \text{ GeV}$:

In diesem hohen Energiebereich könnte eine strengere Symmetrie gelten, die aber nach unten hin gebrochen ist. Selbst wenn hier die „normale“ Physik noch gilt, erwartet man bei Energien von 10^{14-15} GeV einen Phasenübergang zur *GUT* (*Grand Unified Theory*).

$10^{15} \text{ GeV} \leq E \leq 10^{19} \text{ GeV}$:

Innerhalb der G_s -Symmetrie, wobei

$$G_s = SU(3)_c \otimes SU(2)_w \otimes U(1)_{B-L} \quad (8.19)$$

definiert wurde, kann die Vereinigung der Kräfte nicht erreicht werden. Da diese das Produkt dreier Gruppen darstellt, gibt es prinzipiell drei Kopplungskonstanten g_1, g_2 und g_3 . Eine tatsächliche Vereinigung würde aber eine Reduktion auf lediglich eine Kopplungskonstante g verlangen. Die Werte der g_n werden im Moment der spontanen Symmetriebrechung bestimmt.

Die Kopplungskonstanten sind Funktionen der Energie. Eine Extrapolation aus dem bekannten Niederenergiebereich ergibt einen ungefähren gemeinsamen Schnittpunkt bei einer Energie von $10^{13} - 10^{15} \text{ GeV}$ (Abb. 8.4 links). Daß es nicht einen exakten Schnittpunkt gibt könnte daran liegen, daß zwischen G_s und G_{GUT} weitere Zwischensymmetrien liegen, welche die Steigung der dargestellten Geraden beeinflussen.

Erst in jüngster Zeit wurde die Vereinheitlichung erreicht, durch die Theorie der Supersymmetrie (Abb. 8.4 rechts), der Symmetrie zwischen Teilchen mit halbzahligem und ganzzahligem Spin. Diese führt neben vielen weiteren Teilchen,

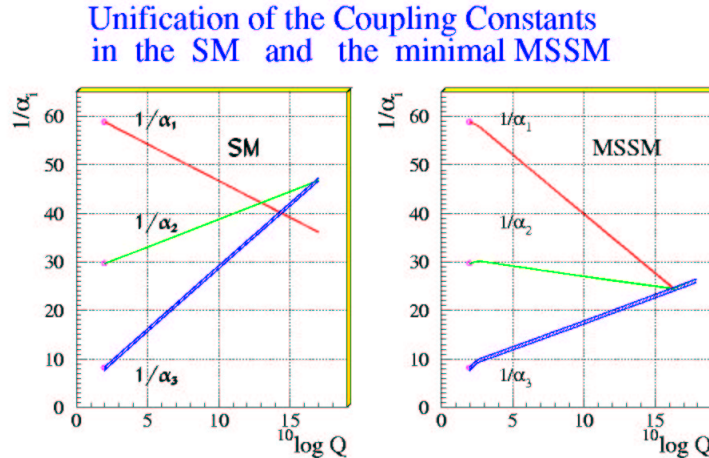


Abbildung 8.4: Verlauf der inversen Kopplungskonstanten links im Standardmodell und rechts in der Supersymmetrie Erweiterung des Standardmodells (MSSM).

die man teilweise schon experimentell nachweisen können müßte, eine erhaltene multiplikative Quantenzahl, die *Parität* R ein.

$$R = (-1)^{3B+L+2s} \quad (8.20)$$

Alle bekannten Teilchen (*Particles*) haben $R = +1$. Die Theorie erlaubt aber genau so viele supersymmetrische Partner (*Sparticles*) mit $R = -1$. Die Erhaltung von R impliziert die ausschließliche Produktion von sparticle/antiparticle-Paaren. Die leichtesten supersymmetrischen Teilchen müssen deshalb stabil sein.

$E \geq 10^{19}$ GeV:

Auf der Energieskala ist jetzt die *Planckmasse* erreicht. Gravitative und quantenmechanische Effekte sind von äquivalenter Wichtigkeit, so daß die Teilchenphysik nun nicht mehr ohne Berücksichtigung der Gravitation auskommt. Bisher gibt es aber noch keine Theorie, die diese beiden Effekte vereint.

Es ist bisher noch nicht verstanden, warum es genau drei Lepton-, bzw. Quark-Familien gibt, denn für die Theorie der Symmetrie würde eine Familie genügen. Diese *FUT* (*Family Unification Theory*) muß nicht notwendigerweise mit der GUT identisch sein.

Weitere offene Fragen sind unter anderem:

- Bedeutung der vielen freien Parameter von G_s .
- Warum ist die elektrische Ladung so, wie sie ist?

- Wieviele Higgs-Skalare gibt es?
- Was ist der Grund für die CP-Verletzung?
- Warum ist die Parität maximal verletzt?
- Verschwindet die links/rechts-Asymmetrie bei höheren Energien?

In einer GUT sind alle Leptonen und Quarks Komponenten ein und desselben Feldes. Es müssen also *Leptoquark-Vektorbosonen* X existieren, die Quarks in Leptonen und umgekehrt umwandeln können. Dies wiederum hätte immense Folgen auf die Stabilität der Materie, da sich die in einem Proton befindlichen, in Leptonen umwandelnden Quarks, dieses instabil werden lassen würden. Die experimentell bestimmte Grenze der mittleren Lebensdauer eines Protons ist

$$\tau_p \geq 10^{33} \text{ Jahre}, \quad (8.21)$$

womit sich GUT's basierend auf der $SU(5)$ bereits als Kandidaten ausschließen lassen.

8.4 Neutrino-Oszillationen

Experimente auf der Spur massenbehafteter Neutrinos¹

Experimente mit Neutrinos, die in der Sonne oder der Atmosphäre entstehen, liefern seit längerem Hinweise auf Neutrino-Oszillationen, d.h. der Umwandlung einer Neutrinoart in eine andere, und damit eine von Null verschiedene Ruhemasse der Neutrinos. In den letzten Monaten haben diese Indizien durch neue Ergebnisse des Super-Kamiokande-Experiments in Japan wesentlich an Gewicht gewonnen. Insbesondere die aktuellen Resultate über Atmosphären-Neutrinos liefern erstmals eine überzeugende Evidenz für massenbehaftete Neutrinos.

Als Anfang Juni 1998 die Super-Kamiokande-Kollaboration auf der Neutrino '98-Tagung in Takayama (Japan) ihre aktuellen Ergebnisse über die Evidenz für Oszillationen von Atmosphären-Neutrinos vortrug, wurde dies als absoluter Tagungshöhepunkt und als eines der potentiell wichtigsten Resultate der experimentellen Neutrinophysik gewertet. Dies beruht darauf, daß die experimentell so schwer nachzuweisenden Neutrinos lange als *masselos* galten. Dies hat sich mit der vorliegenden überzeugenden Evidenz für Neutrino-Oszillationen durch Super-Kamiokande geändert, da gemäß den Gesetzen der Quantenmechanik nur *massenbehaftete* Neutrinos „oszillieren“, d.h. sich in andere Neutrinoarten umwandeln können. Ein Beispiel einer Oszillation ist der Übergang eines myonischen in ein tauonisches Neutrino $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$.

Weitere Fragen werfen die experimentellen Hinweise auf ein signifikantes Defizit der auf der Erde detektierten Sonnen-Neutrinos auf. Da ein astrophysikalischer Ursprung dieses Defizits nahezu ausgeschlossen ist, wird eine Erklärung auf der

¹G. Drexlin, Phys. Bl., Februar 1999, S. 25

Basis oszillierender Sonnenneutrinos wahrscheinlich.

8.4.1 Neutrinomassen

Ob Neutrinos massenbehaftete oder — wie im Standardmodell der Teilchenphysik postuliert — exakt masselose Elementarteilchen sind, ist seit längerem die zentrale Frage der Neutrinophysik. Das Fehlen eines tieferen Symmetriegesetzes, das eine Masselosigkeit von Neutrinos erklären würde, führt in erweiterten theoretischen Ansätzen (z. B. GUT) zur Vorhersage von Neutrinomassen von der μeV bis zur eV-Skala. Die im Vergleich zu den geladenen Leptonen extrem kleine Ruhemasse des Neutrinos ist damit ein deutliches Indiz für eine „neue Physik“ jenseits des Standardmodells der Teilchenphysik. Darüber hinaus haben Neutrinos mit Masse weitreichende Konsequenzen für die *Kosmologie* und *Astrophysik*. Dies gilt insbesondere für die in großer Anzahl beim Urknall gebildeten Neutrinos, die als massebehaftete Teilchen fundamentale Auswirkungen bei der Entstehung von Leptonen und Baryonen, der primordialen Nukleosynthese sowie der Entstehung von Strukturen hätten. Von experimenteller Seite wird daher eine Vielzahl unterschiedlichster Neutrino-Quellen (Sonne, Atmosphäre, Beschleuniger mittlerer und hoher Energien sowie Kernreaktoren) zur Suche nach Effekten der Neutrinomasse eingesetzt.

Die sensitivste Methode zum Nachweis kleiner Neutrino-Massen im eV- bzw. sub-eV-Bereich bildet die Suche nach Neutrino-Oszillationen. Hierbei unterscheidet man zwei unterschiedliche experimentelle Vorgehensweisen. In den *appearance-Experimenten* wird nach dem Auftauchen einer neuen, im ursprünglichen Strahl nicht vorhandenen Neutrinoart gesucht. In einem *disappearance-Experiment* hingegen muß die Ab- und Zunahme des Flusses einer bestimmten Neutrinoart festgestellt werden. Da man das Auftauchen einer neuen Neutrinoart statistisch signifikanter feststellen kann, als eine entsprechende geringfügige Abnahme der Intensität der ursprünglich vorhandenen Neutrinoart, lassen sich mit appearance-Experimenten auch äußerst kleine Oszillationseffekte nachweisen.

8.4.2 Sonnen-Neutrinos

Das Problem der Sonnen-Neutrinos ist der historisch am längsten bestehende Hinweis auf oszillierende Neutrinos und beruht auf dem signifikanten Defizit der gemessenen Rate von niederenergetischen ν_e aus der Sonne im MeV-Bereich im Vergleich mit den Erwartungen aus dem Standard-Sonnenmodell. Die vier „klassischen“ Sonnenneutrino-Experimente (Homestake, Kamiokande, Gallex und Sage) messen alle ein Defizit von einem Faktor 2–4, dessen Größe stark von der experimentspezifischen Nachweisschwelle abhängt. Durch ihre Schwelle sind die Experimente auf verschiedene Komponenten des in Abb. 8.5 gezeigten Sonnenneutrino-Spektrums sensitiv.

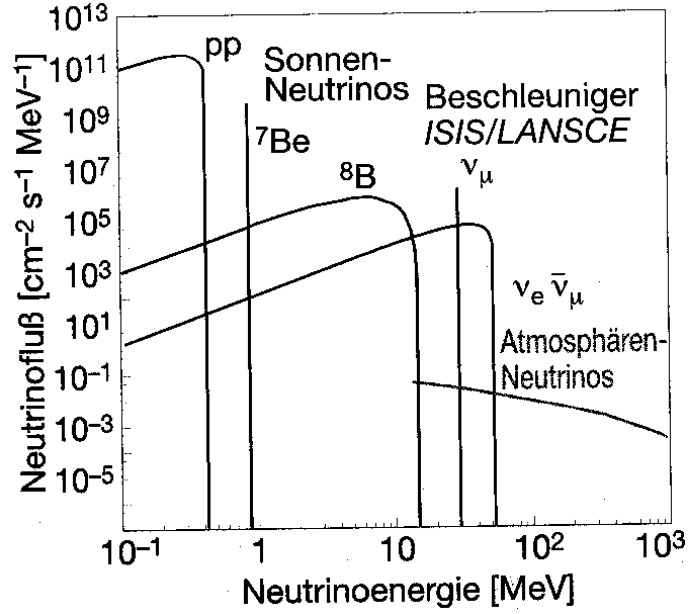


Abbildung 8.5: Energiespektren von Sonnen-, Atmosphären- und Beschleunigerneutrinos bis 1 GeV.

Eine astrophysikalische Erklärung des Neutrinodefizits basiert auf einer Änderung der Erzeugungsraten von Neutrinos aus den Fusionsreaktionen im Sonnenkern, was zu einer Änderung der relativen Flußnormierung der drei Hauptkomponenten der Sonnen-Neutrinos (pp-Neutrinos, ${}^7\text{Be}$ -Neutrinos, ${}^8\text{B}$ -Neutrinos) führen würde. Die von einer Vielzahl von Autoren durchgeführten kombinierten Analysen der vier klassischen Experimente schließen übereinstimmend eine derartige Lösung mit hoher Wahrscheinlichkeit aus. Eine wesentlich bessere Beschreibung der experimentellen Resultate wird erreicht, wenn man annimmt, daß das Spektrum der Sonnen-Neutrinos durch E_ν -abhängige Oszillationseffekte stark modifiziert wird. Ein Test dieser Szenarien erfordert daher eine präzise Spektroskopie des gesamten Neutrinospektrums. Die hierbei äußerst wichtigen niederenergetischen pp- und ${}^7\text{Be}$ -Neutrinos im sub-MeV-Bereich lassen sich bisher nur mit radiochemischen ${}^{37}\text{Cl}$ - und ${}^{71}\text{Ga}$ -Detektoren nachweisen. Dementsprechend steht eine spektroskopische Information bisher nur für den hochenergetischen Teil der ${}^8\text{B}$ -Neutrinos zur Verfügung. Eine weitere Einschränkung ergibt sich aus der Tatsache, daß alle Detektoren nur auf die ν_e -disappearance sensitiv sind, da oszillierte ν_μ oder ν_τ nicht nachgewiesen werden können.

Für eine Modifikation des Neutrinospektrums kommen zwei sehr unterschiedliche Mechanismen in Frage: Zum einen ist denkbar, daß Neutrinos auf dem Flugweg von der Sonne zur Erde oszillieren. Die dementsprechend große Oszillationslänge

$$\lambda_{osz} \approx 10^8 \text{ km} \quad (8.22)$$

impliziert einen sehr kleinen Wert von

$$\Delta m^2 \approx 10^{-10} \text{ eV}^2 . \quad (8.23)$$

Zum anderen können Flavouroszillationen mit wesentlich kürzerem λ_{osz} durch Materieeffekte im Inneren der Sonne resonanzartig verstärkt werden. Der nach seinen Entdeckern Mikheyev, Smirnov und Wolfenstein benannte MSW-Effekt hat daher eine, deutlich verschiedene Skala von

$$\Delta m^2 \approx 10^{-5} \text{ eV}^2 . \quad (8.24)$$

Eine Diskriminierung zwischen den beiden Mechanismen mit ihren sehr unterschiedlichen Parameterbereichen (Abb. 8.8) erfordert zusätzliche spektroskopische Informationen durch neue Experimente.

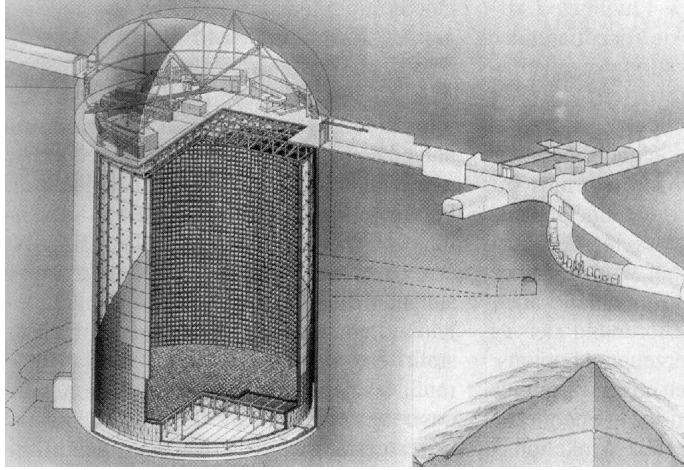


Abbildung 8.6: Der 40 Meter hohe Super-Kamiokande Detektor zum Nachweis von Sonnen- und Atmosphären-Neutrinos

Eine der wesentlichen Ziele des im April 1996 in Betrieb genommenen Super-Kamiokande-Detektors in der 1 km tiefen Kamioka-Mine in Japan ist es, das Spektrum der ^8B -Neutrinos mit hoher Statistik genau zu vermessen. In dem mit 50000 t bisher massereichsten Neutrinodetektor der Welt wurden im Zeitraum von Mai '96 bis März '98 in einer Meßzeit von 504 Tagen insgesamt 6823 ^8B -Neutrinos über die elastische Neutrino-Elektron-Streuung nachgewiesen. Die Direktionalität der ν_e^- -Streuung ermöglicht die klare Abtrennung des Untergrunds aus Spallationsreaktionen kosmischer Myonen. Super-Kamiokande findet im Energieintervall von 6.5–14 MeV einen Neutrinofluß von

$$(2.44 \pm 0.09) \times 10^6 \frac{\nu_e}{\text{cm}^2\text{s}} .$$

Vergleicht man diesen Wert mit der Vorhersage des Standard-Sonnenmodells von

$$5.2 \times 10^6 \frac{\nu_e}{\text{cm}^2\text{s}},$$

so ergibt sich ein deutliches Defizit an B-Neutrinos (Faktor 0.474), das frühere experimentelle Resultate von Kamiokande bei nun wesentlich verbesserter Statistik bestätigt.

Die derzeitige Statistik reicht zwar noch nicht aus, um die erwarteten kleinen Modifikationen des Rückstoßspektrums durch den MSW-Effekt oder durch Vakuumoszillation zweifelsfrei feststellen zu können. Dank der hohen Statistik von 13.5 nachgewiesenen Sonnen-Neutrinos pro Tag werden die weiten Messungen von Super-Kamiokande aber weitere vielfältige Tests von unterschiedlichen Modellen ermöglichen, z. B. durch die Suche nach Tag/Nacht-Effekten und jahreszeitlichen Schwankungen der ν_e -Rate.

In den nächsten Jahren werden zwei Sonnen-Neutrino-Experimente der „zweiten Generation“ in Betrieb gehen, von denen man sich weitere wesentliche Erkenntnisse erhofft. Seit Anfang 1999 ist in einer 2 km tiefen kanadischen Mine der SNO-Detektor (Sudbury Neutrino Observatory) meßbereit, ein aus 1000 t hochreinem Schwerwasser (D_2O) bestehender Čerenkov-Detektor. SNO hat zwei Hauptziele: Zum einen soll über die ν_e -spezifische Reaktion schwacher geladener Ströme

$$\text{d}(\nu_e, e^-)\text{p} + \text{p}$$

die spektrale Form der ^8B -Neutrinos präzise vermessen werden. Darüber hinaus ist geplant, die durch schwache neutrale Ströme induzierte Aufbruchreaktion des Deuterons

$$\text{d}(\nu, \nu')\text{p} + \text{n}$$

zu beobachten, mit der erstmals Sonnen-Neutrinos ab der Reaktionsschwelle von 2.2 MeV unabhängig von ihrem Flavourzustand nachgewiesen werden können. Aus dem Vergleich der beiden Raten läßt sich dann eine erste direkte Aussage über Oszillationen von ^8B -Neutrinos treffen.

Der sich derzeit im italienischen Gran Sasso Labor im Aufbau befindliche Borexino-Detektor soll es erstmals ermöglichen, spektroskopische Informationen im sub-MeV-Bereich zu gewinnen. Im Mittelpunkt des Interesses steht die Untersuchung der monoenergetischen ^7Be -Neutrinos, die für das MSW-Szenarium deutlich unterdrückt (d. h. in einen anderen Flavourzustand transformiert) sind. Der Neutrino-Nachweis geschieht über die elastische $\nu - e$ -Streuung in einem 100 t schweren Flüssigszintillator, an dessen radiochemische Reinheit extreme Anforderungen gestellt werden.

Parallel zu den neuen werden auch die Experimente GNO, Sage und Super-Kamiokande weiter betrieben werden, so daß der aktuelle Sonnenzyklus im

„Licht der Neutrinos“ über mehrere Jahre hinweg sehr präzise untersucht werden kann. Die gleichzeitigen Messungen mit radiochemischen und spektroskopischen Detektoren sollten daher in den nächsten Jahren eine eindeutige Lösung des Sonnenneutrino-Problems ermöglichen.

8.4.3 Atmosphären-Neutrinos

Der bisher deutlichste Hinweis auf oszillierende Neutrinos stammt aus der Untersuchung von Atmosphären-Neutrinos, die mit Energien im GeV-Bereich bei der Wechselwirkung der kosmischen Strahlung in den oberen Atmosphärenschichten in einer Höhe von 10–20 km über dem Erdboden entstehen. Die dabei zunächst erzeugten Pionen und Kaonen zerfallen über Prozesse der schwachen Wechselwirkung und erzeugen myonische und elektronische Neutrinos. Faßt man die experimentell nicht unterscheidbaren Neutrino- und Antineutrinoanteile der einzelnen Flavours zusammen, erwartet man für das Verhältnis der beiden Flavour-Komponenten einen Wert

$$R = \frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e} = R(\mu/e) = 2 \quad . \quad (8.25)$$

Die Berechnungen des absoluten Flusses von ν_e und ν_μ aus der Atmosphäre sind mit einer Unsicherheit von $\pm 20\%$ behaftet. Das Flavourverhältnis $R(\mu/e)_{\text{Theorie}}$ läßt sich hingegen mit einem Fehler von weniger als 5% wesentlich besser berechnen, da die Unsicherheiten im absoluten Fluß sich weitgehend aufheben. Experiment und Theorie lassen sich daher über das doppelte Flavourverhältnis

$$\frac{R(\mu/e)_{\text{Daten}}}{R(\mu/e)_{\text{Theorie}}}$$

mit hoher systematischer Genauigkeit vergleichen. In einer Reihe von früheren Experimenten (Kamiokande, IMB-3 und Soudan-2) ergab sich bereits ein signifikant von der Erwartung ($\equiv 1$) abweichendes Flavourverhältnis

$$\frac{R_{\text{Daten}}}{R_{\text{Theorie}}} \approx 0.6 \quad (8.26)$$

als Grundlage der „Anomalie der Atmosphären-Neutrinos“.

Super-Kamiokande ist prädestiniert für die detaillierte Untersuchung von Atmosphären-Neutrinos. Neutrino-Wechselwirkungen im Detektor lassen sich mit Hilfe des Vetozählers mit hoher Effizienz von den 10^5 mal häufigeren Ereignissen durchdringender kosmischer Myonen trennen. Nach einer Meßzeit von etwas über einem Jahr konnte Super-Kamiokande insgesamt 4854 Atmosphären-Neutrinos über ihre charakteristischen Čerenkov-Ringe identifizieren. Ausgehend von einer detaillierten Analyse der Ringtopologie wurde zunächst das Flavourverhältnis (μ/e) bestimmt, das — bei nun wesentlich verbesserter Statistik — mit

$$\frac{R_{\text{Daten}}}{R_{\text{Theorie}}} = 0.63 + 0.03_{\text{stat}} + 0.05_{\text{sys}} \quad (8.27)$$

die früher beobachtete Flavouranomalie bei den Atmosphärenneutrinos bestätigt.

Während dieses Resultat als erstes Indiz für Neutrino-Oszillationen gewertet werden kann, ist es *per se* noch kein zwingender Beweis dafür. Eine wesentlich überzeugendere Evidenz für Oszillationen ergibt sich aus der beobachteten *Zenithwinkelabhängigkeit* dieser Ereignisse. Atmosphären-Neutrinos werden in einer nur wenige Kilometer dünnen Schicht der oberen Atmosphäre rund um die Erde gebildet und durchqueren die Erde ungehindert (alle anderen Teilchen werden durch die Erde herausgefiltert). Dadurch kann über eine Messung des Zenithwinkels θ der Flugweg der Neutrinos von der Quelle bis zum Detektor von $L \approx 15$ km für vertikal nach unten laufende Neutrinos ($\cos \theta = 1$) bis zu $L \approx 13000$ km für vertikal nach oben laufende Neutrinos ($\cos \theta = -1$) um einen Faktor 10^3 variiert werden. Da die Oszillationswahrscheinlichkeit P_{osz} von der Neutrino-Fluglänge L abhängt, sollten sich Effekte oszillierender Neutrinos in einer Modifikation der erwarteten $\cos \theta$ -Verteilung manifestieren.

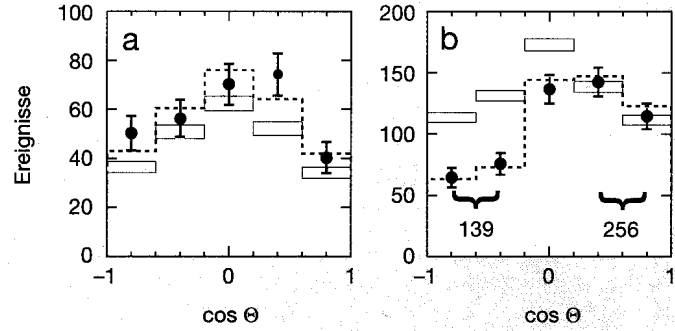


Abbildung 8.7: Die von Super-Kamiokande detektierten Atmosphärenneutrinos in Abhängigkeit vom Zenithwinkel θ für elektronische (a) und myonische (b) Neutrinos im Vergleich mit theoretischen Berechnungen (Balken).

Für diese Untersuchungen eignen sich vor allem die höherenergetischen Neutrinos im multi-GeV-Bereich, da für diese eine eindeutige (oben/unten)-Symmetrie in der Zenithwinkelverteilung erwartet wird. Darüber hinaus erlaubt die Reaktionskinematik auch eine wesentlich bessere Zuordnung der Neutrino-Flugrichtung zur Spur des erzeugten Leptons. Abb. (8.7) zeigt die gemessenen $\cos \theta$ -Verteilungen für ν_e und ν_μ im multi-GeV-Energiebereich. Während für die ν_e -Ereignisse eine mit der Erwartung konsistente $\cos \theta$ -Verteilung beobachtet wird, zeigt die entsprechende Winkelverteilung der ν_μ eine deutliche (oben/unten)-Asymmetrie. Das winkelabhängige Neutrino-Defizit ist am ausgeprägtesten für nach oben laufende Neutrinos mit Flugwegen von einigen 10^3 km. Das Verhältnis von aufwärts zu abwärts laufenden myonartigen Ereignissen in Abb. (8.7b) weicht mit

$$\frac{R_{\uparrow}}{R_{\downarrow}} = 0.54 + 0.06_{\text{stat}} \quad (8.28)$$

um mehr als 6σ von dem erwarteten Wert 1 ab. Es legt eine maximale Neutrino-

mischung nahe und ist das bisher deutlichste experimentelle Indiz für Neutrino-Oszillationen.

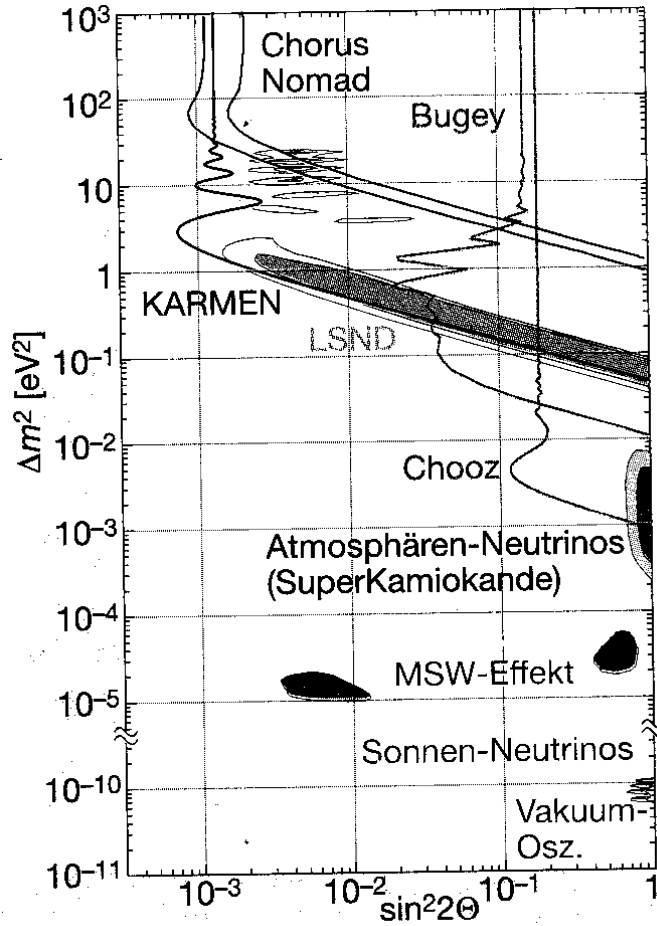


Abbildung 8.8: Gesamtübersicht der erlaubten und ausgeschlossenen Bereiche der Oszillationsparameter Δm^2 und $\sin^2 \theta$

Die Symmetrie in den ν_e -Daten sowie die negativen Resultate des Reaktorexperimentes Chooz im $\bar{\nu}_e \rightarrow x$ -disappearance-Kanal legen eine Erklärung der Super-Kamiokande-Daten durch den $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal nahe. Die beste Beschreibung der beobachteten Winkelverteilung wird dabei durch die Parameterkombination maximaler Mischung

$$\sin^2 2\theta = 1.0$$

und

$$\Delta m^2 = 2.2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (8.29)$$

erreicht (Abb. 8.7b). Der durch diese Anpassung an die Daten mit 90%-Konfidenz

erlaubte Parameterbereich ist in Abb.(8.8) dargestellt. Bei der Diskussion dieser Resultate muß festgehalten werden, daß durch die $\cos\theta$ -Verteilungen nur die ν_μ -disappearance festgestellt werden kann. Zur Identifikation des $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanals wäre ein Nachweis eines τ -Zerfallsprozesses erforderlich, der aber aufgrund der kleinen τ -Produktionswirkungsquerschnitte nicht möglich ist. Daher ist auch denkbar, daß die ν_μ statt in — bisher unbekannte — *sterile* und daher nicht nachweisbare Neutrinos oszillieren. Die Evidenz für Oszillationen aus dem (μ/e) -Flavourverhältnis sowie der ν_μ -Zenithwinkelabhängigkeit wird ergänzt durch zwei weitere unabhängige Analysen von nach oben laufenden Myonen ($\cos\theta < 0$), die durch sehr hochenergetische ν_μ im Fels unterhalb des Detektors erzeugt werden. Super-Kamiokande kann daher auf der Basis von vier unterschiedlichen Messungen auf eine Evidenz für Oszillationen schließen. Die in sich konsistenten Daten können in ihrer Gesamtheit als robustes Resultat gewertet werden, das nur schwer durch „konventionelle“ Physik zu erklären ist.

Dessen ungeachtet ist ein endgültiger Beweis der Existenz von Oszillationen erst nach der unabhängigen Verifikation dieser Resultate durch Experimente mit Beschleuniger-Neutrinos erbracht. In Japan wird 1999 das erste neuartige *long baseline*-Experiment mit großer Entfernung zwischen Quelle und Detektor mit der Datenaufnahme beginnen. Ein am KEK-Protonenbeschleuniger erzeugter ν_μ -Strahl mit Energien im GeV-Bereich wird zum 250 km entfernten Super-Kamiokande-Detektor geschickt und dort auf die disappearance von ν_μ hin untersucht. Die Sensitivität dieses Experimentes (K2K) wird eine erste teilweise Überprüfung des in Abb. (8.8) gezeigten Evidenzbereiches ermöglichen. Eine umfassendere Untersuchung des gesamten Parameterbereiches der Atmosphären-Neutrinos wird in den geplanten long baseline-Experimenten in Europa und Nordamerika angestrebt. In Europa plant man, einen Neutrinostrahl vom CERN in das italienische Gran Sasso Labor zu schicken. Beim konkurrierenden MINOS-Experiment in der kanadischen Soudan-Mine ist beabsichtigt, einen nahezu identischen Neutrinostrahl vom Fermilab-Beschleuniger zu nutzen. In beiden Fällen arbeitet man mit einem Abstand Quelle-Detektor von $L \approx 730$ km und ist neben der Untersuchung der ν_μ -disappearance besonders an der Suche nach Kandidaten aus $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Oszillationen interessiert.

8.4.4 Beschleuniger-Neutrinos

Experimente mit Sonnen- und Atmosphären-Neutrinos tasten aufgrund der großen Entfernung zwischen Quelle und Detektor ($L = 10\text{--}10^8$ km) sehr kleine Δm^2 -Werte bis 10^{-11} eV² ab. Sie sind als disappearance-Experimente aber nur auf große Massenmischungen empfindlich. Die bisher durchgeführten Beschleunigerexperimente sind mit $L = 10000$ m hingegen auf die Massenskala $\Delta m^2 > 0.1$ eV² sensitiv, die im Hinblick auf die mögliche Rolle von Neutrinos als heiße dunkle Materie im Universum von besonderem kosmologischen Interesse ist. Die Sensitivitätsbereiche der Experimente mit astrophysikalischen und Beschleuniger-Neutrinos überlappen sich daher nicht (diese Lücke wird erst durch die oben erwähnten *long baseline*-Experimente geschlossen). Au-

ßerdem erlauben es Beschleunigerexperimente, gezielt nach Oszillationen über appearance-Kanäle zu suchen. In den beiden komplementären Kanälen

$$\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau \quad \text{und} \quad \nu_\mu \rightarrow \nu_e$$

lassen sich sehr hohe Sensitivitäten von

$$\sin^2 2\theta \approx 10^{-4} \quad (8.30)$$

erreichen.

$\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal

Die am SPS-Protonenbeschleuniger am CERN von 1993-98 durchgeführten Hochenergieexperimente Chorus (Cern Hybrid Oscillation Apparatus) und Nomad (Neutrino Oscillation Magnetic Detector) suchten nach $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Oszillationen in einem Neutrino-Strahl mit einer mittleren Energie von 30 GeV. Potentielle ν_μ -Kandidaten werden identifiziert über Reaktionen geladener schwacher Ströme, bei denen ein τ^- produziert wird. Der Nachweis eines Zerfalls des τ^- gilt dann als Evidenz für $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -appearance. Beide Experimente haben mit unterschiedlichen experimentellen Techniken bisher keinen überschuß an τ -Zerfallskandidaten beobachtet, so daß eine obere Grenze (90% Konfidenz) für $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Oszillationen von

$$P_{\text{osz}} < 6.0 \times 10^{-4}$$

angegeben werden kann Abb. (8.8). Da beide Experimente noch nicht ihre gesamte aufgenommene Datenmenge analysiert haben, kann dieses Limit — bei weiterhin ausbleibendem Signal — zukünftig deutlich verbessert werden.

$\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal

An hochintensiven Beschleunigern im mittleren Energiebereich lassen sich in komplementärer Weise die appearance-Kanäle

$$\nu_\mu \rightarrow \nu_e \quad \text{und} \quad \bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$$

untersuchen. Zur Zeit am sensitivsten in diesen Kanälen sind das LSND- und das KARMEN-Experiment. Bei beiden werden zunächst Protonen auf eine Energie von 800 MeV beschleunigt und dann auf ein kompaktes Metalltarget gelenkt, in dem sie nach einer Flugstrecke von weniger als 0.5 m stoppen. Dabei entstehen neben Spallationsneutronen auch Pionen, die ebenfalls noch innerhalb des Targets gestoppt werden. Die Neutrinos entstehen beim π^+ -Zerfall in Ruhe mit $T = 26 \text{ ns}$ über

$$\pi^+ \rightarrow \pi^+ + \nu_\mu$$

sowie dem anschließenden Zerfall des Myons

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

mit $T = 2.2 \mu\text{s}$ in einem Energiebereich bis 53 MeV. (Abb. 8.5)

Für die Suche nach Oszillationen sind Mittelenergiebeschleuniger besonders geeignet, da die intrinsische Verunreinigung $\bar{\nu}_e/\bar{\nu}_\mu$ des Strahls nur einige 10^{-4} beträgt, so daß ein ν_e -Signal in der Größenordnung von einigen 10^{-3} als deutliches Indiz für Oszillationen gewertet werden kann. $\bar{\nu}_e$ aus Flavour-Oszillationen werden in großvolumigen Szintillationsdetektoren über den „klassischen“ inversen β -Zerfall ${}^1\text{H}(\bar{\nu}_e, e^+)n$ nachgewiesen.

LSND

Das LSND-Experiment benutzt einen 167 t schweren Flüssigszintillationsdetektor (Liquid Scintillator Neutrino Detector) am LANSCE-Beschleuniger in Los Alamos zur Suche nach den beiden appearance-Kanälen

$$\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e \quad \text{und} \quad \nu_\mu \rightarrow \nu_e .$$

Der 30 m vom Strahlstop entfernt stehende zylinderförmige Detektortank ist mit einem stark verdünnten Szintillator auf Mineralölbasis gefüllt, dessen ${}^{12}\text{C}$ - und ${}^1\text{H}$ -Kerne das Neutrinotarget bilden.

Auf der Basis einer vierjährigen Meßzeit von 1993-97 ergibt sich nach Abzug des kosmischen und Neutrino-induzierten Untergrundes ein deutlicher strahlkorrelierter überschuß von (33.9 ± 8.0) Ereignissen. Interpretiert man diesen als Signatur von $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ -Oszillationen, ergibt sich eine Oszillationswahrscheinlichkeit von

$$P_{\text{osz}} = (3.1 \pm 0.9_{\text{stat}} \pm 0.5_{\text{sys}}) \times 10^{-3} . \quad (8.31)$$

Im Rahmen eines mehrdimensionalen Likelihood-Verfahrens lassen sich aus diesem Resultat die von LSND favorisierten Parameterbereiche in der Δm^2 - $\sin^2 2\theta$ -Ebene ableiten. Die in Abb. (8.8) dargestellten sog. 90%- und 99%-Likelihood-Flächen sind jedoch hinsichtlich ihrer statistischen Interpretation nicht eindeutig, da sie nicht einem klassischen Konfidenzintervall entsprechen. Beschränkt man sich daher auf die vom Parameter Δm^2 abhängige Form des gemessenen e^+ -Spektrums, so bevorzugen die LSND-Daten den Bereich $\Delta m^2 \leq 2 \text{ eV}^2$ mit einem Zentralwert bei 0.3 eV^2 . Eine unabhängige Überprüfung der LSND-Resultate erfordert dessen ungeachtet eine systematische Abdeckung des gesamten in Abb. (8.8) dargestellten erlaubten Parameterbereiches.

KARMEN

Das seit 1990 an der Spallationsquelle ISIS in Chilton (England) durchgeführte Karlsruhe-Rutherford Mittelenergie Neutrino Experiment (KARMEN) ist ein in wesentlichen Grundzügen mit LSND vergleichbares Experiment und damit

in idealer Weise geeignet, dessen Resultate präzise zu überprüfen. Das *rapid cycling*-Synchrotron von ISIS liefert hochintensive, nur $0.5\,\mu\text{s}$ kurze Protonenpulse. Das daraus resultierende extrem kleine Tastverhältnis von 10^{-4} (Verhältnis Strahl an/aus) führt zu einer deutlichen Reduktion des kosmisch induzierten Untergrundes, der dominanten Untergrundkomponente.

Der KARMEN-Detektor befindet sich in einem mittleren Abstand von 17.6 m vom ISIS-Target und ist zum spektroskopischen Nachweis niederenergetischer Neutrinos optimiert. Das 56 t schwere hochauflösende Flüssigszintillationskalorimeter ist segmentiert und wird von einem mehrlagigen effizienten Vetozählersystem umgeben. Zur Abschirmung gegen strahlkorrelierte Neutronen befindet sich das gesamte Detektorsystem in einem massiven 7000 t schweren Eisenblockhaus.

In den von Februar 1997 bis April 1998 aufgenommenen Daten verbleibt nach Anwendung wohldefinierter Schnitte, die bereits vor Beginn der Datenaufnahme festgelegt wurden, kein Ereignis mit der sequentiellen Signatur einer $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ -Oszillation. Die kleine Untergrunderwartung von (2.88 ± 0.13) Sequenzen entsteht im wesentlichen durch konventionelle Neutrino-Reaktionen und kann durch unabhängige Messungen bestimmt werden. Die KARMEN2-Messungen zeichnen sich daher durch ihre präzise Kenntnis von Signal und Untergrund aus. Im Falle einer maximalen Mischung ($\sin^2 2\theta \equiv 1$) zwischen ν_μ und ν_e hätten 811 Oszillationssequenzen beobachtet werden können. Aus diesem Resultat kann im Rahmen statistischer Verfahren eine obere Grenze für $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ -Oszillationen von

$$\sin^2 2\theta < 1.3 \times 10^{-3} \quad (\text{bei } 90\% \text{ Konfidenz})$$

abgeleitet werden. Die entsprechende Ausschlußkurve für die Parameter $\sin^2 2\theta$ und Δm^2 ist in Abbildung 8.8 dargestellt und bildet das bisher stichhaltigste Limit für Mischungen zwischen elektronischen und myonischen Neutrinos. Die weitreichende Überdeckung der von LSND favorisierten Parameterbereiche durch die KARMEN2-Ausschlußkurve verdeutlicht, daß die gegensätzlichen Resultate der beiden Experimente nur marginal miteinander verträglich sind.

Der endgültige Beweis, daß Neutrinos tatsächlich oszillieren und damit massenbehaftet sind, sowie darüber hinaus die präzise Bestimmung von Massendifferenzen und Mischungsamplituden erfordert mindestens noch ein Jahrzehnt weiterer großer Anstrengungen.

8.5 Übungen

1. Berechnen Sie mit Gl. (2.26) und der Erhaltung des Viererimpulses die Energie eines Photons, das in Gl. (6.23) frei wird. Nehmen Sie dazu an, daß der ${}^4\text{He}$ -Kern in Ruhe entstanden ist ($v_P = v_t = v_{He} \equiv 0$).
2. Die Temperatur des Universums während der Heliumsynthese war $T \approx 0.07\,\text{MeV}$. Warum galt deshalb für den Impuls eines Teilchens $p \approx 3T$?

Schätzen Sie die Breite der Energieverteilung aufgrund der thermischen Bewegung ab. Der entsprechende Zentralwert wurde in Aufgabe 1 berechnet.

3. Sind die Auf- und Absteigeoperatoren S_+ und S_- unitär oder hermitesch?
4. überprüfen Sie die Kommutationsrelationen (7.18) und Antikommutationsrelationen (7.19) für die Pauli-Matrizen (7.15)
5. Wie lautet der Operator Y der schwachen Hyperladung (7.37) in Matrixform?
6. Dem s-Quark ist die Strangeness $S = -1$ eigen. Verallgemeinern Sie die Relation (7.31), so daß die eingeführte Strangeness auch für die K-Mesonen der Gl. (7.39) gilt. Von allen mit drei Quarks möglichen Quark-Antiquark-Systemen sind nur fünf in Gl. (7.39) aufgeführt. Wie lauten die Eigenschaften der fehlenden Systeme?
7. Zeigen Sie, daß das K-Meson kein Eigenzustand des C-Operators ist. Beziehen Sie sich dafür auf die Quark-Struktur.
8. Alle bekannten Baryonen sind qqq-Systeme. Benutzen Sie die u-, d-, und s-Quarks, um die 27 Grundzustände des Baryons herzuleiten. Bestimmen Sie deren Ladung und Strangeness. Tragen Sie Ihre Ergebnisse in einem (I_3, Y) -Diagramm auf.
9. Beweisen Sie, daß die Ausgangszustände $K_L = K_0 - \bar{K}_0$ und $K_S = K_0 + \bar{K}_0$ Eigenzustände des CP-Operators sind. Diese Zustände zerfallen hauptsächlich zu 2π und 3π . Begründen Sie, welche Ausgangszustände zu welchen Endzuständen zerfallen. Was sind daraus die Konsequenzen für die mittlere Lebensdauer der K_L und K_S ?
10. Leiten Sie die Beziehung (7.46) ab.

Kapitel 9

Inflation

9.1 Probleme der Urknalltheorie

Das heutige Standardmodell der Kosmologie hat einige Schwächen. Es erklärt z.B. nicht die Baryonasymmetrie oder die gegenwärtig beobachtete geringe Raumkrümmung (Flachheitsproblem). Weiter Probleme sind das Horizont- und das Monopolproblem, sowie das Problem der Raumzeit. Eine mögliche Lösung ist das Modell des inflationären Universums.

9.1.1 Problem der $B\bar{B}$ -Symmetrie

Das Verhältnis der Anzahldichten von Baryonen zu Photonen ist heute

$$2.6 \leq 10^{10} \eta \leq 3.3 \quad . \quad (9.1)$$

Dieser kleine Wert ist sehr überraschend, da es zum Zeitpunkt des thermischen Gleichgewichts eigentlich gleich viele Quarks und Antiquarks, sowie Leptonen und Antileptonen gegeben haben müßte.

$$N_B = N_{\bar{B}} = N_L \approx N_\gamma \quad (9.2)$$

Ebenso überraschend ist die Tatsache, daß anscheinend keine Antibaryonen existieren. Baryonenzahl-erhaltende Reaktionen wie

$$\gamma + \gamma \leftrightarrow q + \bar{q} \quad , \quad (9.3)$$

die während des thermischen Gleichgewichts zwischen Photonen und Quarks abliefen, würden auf eine heutige gleiche Anzahldichte von Baryonen und Antibaryonen schließen lassen.

Folgend sollen die Fragen, warum η so klein ist, und warum es keine Antimaterie gibt, geklärt werden.

Als sich Baryonen und Antibaryonen annihilierten, nahm N_B mit dem exponentiellen Faktor in der *Maxwell-Boltzmann-Verteilung* (Gl. 5.29) ab. Mit der Anzahldichte N_γ der Photonen (Gl. 5.5) folgt die Temperaturabhängigkeit

$$\eta = \frac{N_B}{N_\gamma} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4.808} \left(\frac{m_n}{kT} \right)^{3/2} e^{-m_n/kT} . \quad (9.4)$$

Zum Zeitpunkt des *Freeze-Out* bei etwa 20 MeV hat das Verhältnis den Wert

$$\eta \approx 6.8 \times 10^{-19} \quad (9.5)$$

erreicht. Eine Erklärung für die Diskrepanz um den Faktor 5×10^8 zu klein könnte eine falsche Anfangsbedingung (9.2) sein.

Da die Erde aus Materie besteht, und der Sonnenwind keine Annihilationen mit dieser bewirkt, besteht auch das Sonnensystem aus Materie. Ebenso wechselwirkt er nicht mit dem interstellaren Medium, was analog den Schluß zuläßt, daß unsere Galaxie aus Materie besteht. Würden andere Galaxien aus Antimaterie bestehen, so würden freie Protonen, die aufgrund ihrer hohen Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit die Milchstraße zum Teil verlassen können, mit der kosmischen Strahlung oder der Antimaterie im interstellaren Medium annihilieren. Da dies nicht gemessen wurde kann man davon ausgehen, daß auch die fremden Galaxien aus Materie bestehen. Es bleibt somit nur noch die Erklärung, daß $N_{\bar{B}}$ und N_B schon während des thermischen Gleichgewichts um

$$N_B - N_{\bar{B}} \approx \eta N_\gamma \quad (9.6)$$

unterschiedlich waren. Nach und nach zerstrahlten alle Antibaryonen, und nur ein kleiner Überschuß ηN_γ an Baryonen konnte „überleben“.

Eine Erklärung für die primordiale $B\bar{B}$ -Asymmetrie könnte in *frühen Phasenübergängen* liegen, für die aber folgende drei Bedingungen erfüllt sein müssen.

1. Die Baryonenzahlerhaltung muß verletzt werden.

Bezüglich Leptonen und Quarks sind die GUTs symmetrisch, es existieren also Leptoquarks X, Y , welche Quarks in Leptonen umwandeln. Damit ist die Baryonenzahl verletzt.

$$X \rightarrow e^- + d \quad \Delta B = 0 + \frac{1}{3} \quad (9.7)$$

$$X \rightarrow \bar{u} + \bar{u} \quad \Delta B = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \quad (9.8)$$

2. C- und CP-Verletzung müssen erlaubt sein.

Diese Operatoren wandeln Teilchen in ihre Antiteilchen um. Bei einer Symmetrie würden die Reaktionen (9.7) und (9.8) gleich häufig mit entgegengesetztem ΔB auftreten, so daß eine $B\bar{B}$ -Asymmetrie aufgehoben würde.

3. Diese Prozesse müssen auch außerhalb des thermischen Gleichgewichts stattfinden.

Im thermischen Gleichgewicht heben sich die Reaktionen (9.7) und (9.8) gegenseitig auf, da sie gleich häufig in entgegengesetzter Richtung ablaufen. Bei 10^{14} GeV, wenn die GUT-Symmetrie in ihr spontan gebrochenes Pendant übergeht, fallen die X-Bosonen aber aus dem thermischen Gleichgewicht heraus und zerstrahlen.

Bei einer Energie

$$E_X = kT_X \sim M_X c^2 \quad (9.9)$$

seien alle X-, Y-, W- und B-Vektorbosonen, das Higgs-Boson, sowie die Gluonen im thermischen Gleichgewicht mit den Leptonen und Quarks. Die Anzahldichte jeder Teilchensorte ist in etwa gleich der Anzahldichte der Photonen.

Ist das Universum jung im Vergleich zur mittleren Lebensdauer der X-Bosonen

$$\tau_H < \tau_X = \Gamma_X^{-1} \quad (9.10)$$

sind noch keine X-Bosonen zerfallen, und deshalb werden auch noch keine Baryonen produziert.

Die Zerfallsrate ist mit der Kopplungskonstanten α der GUT-Wechselwirkung proportional zur Masse.

$$\Gamma_X = \alpha M_X \quad (9.11)$$

Wird in der Temperaturabhängigkeit der Expansionsrate (5.31) die Gravitationskonstante G durch einen Term der Planck-Masse M_P ersetzt, so ergibt sich

$$H = \sqrt{\frac{16\pi\hbar a}{3c} g_{\text{eff}}(T) \frac{T^2}{M_P}} \quad (9.12)$$

Einsetzen der Gln. (9.11) und (9.12) in Gl. (9.10) führt zu

$$AM_X \geq \sqrt{g_{\text{eff}}(T)} \frac{T^2}{M_P} \quad (9.13)$$

Alle Konstanten sind dabei durch A ausgedrückt. Aufgelöst

$$T^2 \leq \frac{AM_X M_P}{\sqrt{g_{\text{eff}}(T)}} \quad (9.14)$$

ergibt sich für eine Temperatur T_X , bei der etwa 100 Freiheitsgrade existieren, eine obere Grenze für die Masse der X-Bosonen

$$M_X \leq A' \frac{M_P}{\sqrt{g_{\text{eff}}(T)}} = A' \frac{1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}}{\sqrt{100}} \approx A' \times 10^{18} \text{ GeV} \quad (9.15)$$

i	Kanal i	ΔB_i	BR_i
1	$X \rightarrow \bar{u} + \bar{u}$	$-\frac{2}{3}$	r
2	$X \rightarrow e^- + d$	$+\frac{1}{3}$	$1 - r$
3	$X \rightarrow u + u$	$+\frac{2}{3}$	$\bar{r}$
4	$X \rightarrow e^+ + \bar{d}$	$-\frac{1}{3}$	$1 - \bar{r}$

Tabelle 9.1: Änderung der Baryonenzahl ΔB für verschiedene Zerfallskanäle

Bei Energien größer dieser Masse sind die X-Bosonen stabil, Baryonen werden also erst unterhalb dieser Schranke produziert.

In Tabelle 9.1 ist der Unterschied ΔB in der Anzahl der Baryonen für verschiedene Kanäle i dargestellt. Das Verhältnis

$$BR_i = \frac{\Gamma(X \rightarrow i)}{\Gamma(X \rightarrow \text{all})}$$

wird in Termen zweier unbekannter Parameter r und $\bar{r}$ ausgedrückt. Für den Zerfall eines X - $\bar{X}$ -Paares ergibt sich damit

$$\Delta B = r \Delta B_1 + (1 - r) \Delta B_2 + \bar{r} \Delta B_3 + (1 - \bar{r}) \Delta B_4 = \bar{r} - r \quad . \quad (9.16)$$

Bei verletzter C- und CP-Symmetrie sind r und $\bar{r}$ unterschiedlich, und es folgt damit $\Delta B \neq 0$.

9.1.2 Horizontproblem

In Kapitel 5 wurde für ein thermisches Gleichgewicht während der Strahlungsära argumentiert, da sich die Photonen zu dieser Zeit frei im ganzen Universum bewegen konnten, und die Reaktionszeiten wesentlich kleiner waren, als die Hubblezeit. Das Problem dabei ist aber, daß Zustände zu einem beliebigen Zeitpunkt nur innerhalb ihrer Vergangenheits-Lichtkegel beeinflusst werden können.

Zum Zeitpunkt der Rekombination $t_{rec} = 300000yr$ betrug die Temperatur 3000 K. Für den Skalenfaktor würde man $S_{rec} = ct_{rec} = 350000Ly$ erwarten. Wir wollen nun aus der heute vorherrschenden Temperatur von 2.7 K (Hintergrundstrahlung) zurückrechnen auf die Größe des Universums zum Zeitpunkt der Rekombination. Mit der Relation

$$T \propto S^{-1} \quad (9.17)$$

bestimmen wir das Verhältnis der Temperaturen bzw. der Skalenfaktoren:

$$\frac{T_{rec}}{T_{heute}} = 1111 = \frac{S_{heute}}{S} \quad . \quad (9.18)$$

Mit dem Alter des Universums und dem daraus resultierenden Skalenfaktor $S_{heute} = 15 \times 10^9 Ly$ ergibt sich $S = 14 \times 10^6 Ly$ für den aus der Hintergrundstrahlung zurückgerechneten Wert. Er unterscheidet sich vom erwarteten etwa um den Faktor 40. Diese Rechnung ist in Abb. 9.1 veranschaulicht. Photonen können seit ihrer Entstehung nur die Strecke $(AB)_{rec}$ zurückgelegt haben. Die Orte A und B standen zum Zeitpunkt t_{rec} also nicht in kausalem Kontakt. Seit der Rekombination vergrößerte sich der Vergangenheits-Lichtkegel und der Teilchenhorizont linear mit der Zeit. Genau zu diesem Zeitpunkt dehnten sich jedoch alle linearen Entfernungen mit der Expansion des Universums, und damit proportional zu $t^{2/3}$ aus. Deshalb können wir im heutigen Teilchenhorizont Regionen sehen, die zu früherer Zeit nicht in kausalem Kontakt standen!

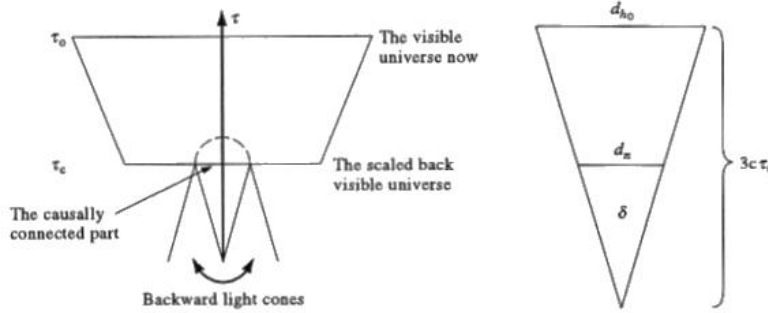


Abbildung 9.1: Die linke Graphik zeigt das sichtbare Universum und den Teilchenhorizont. Die rechte dient der Veranschaulichung der Rechnung.

Wir können weiter den Winkel bestimmen, unter dem der Teilchenhorizont zum Zeitpunkt der Rekombination heute gesehen wird. Es gilt:

$$\Theta = \frac{\text{Kreisbogen}}{\text{Radius}} \quad (9.19)$$

Der Kreisbogen ist S_{rec} mal dem Expansionsfaktor, den wir in (9.18) berechnet haben. Der Radius ist gerade S_{heute} .

$$\Theta = \frac{3.5 \times 10^5 Ly}{15 \times 10^9 Ly} = 0.02 rad = 1.2^\circ \quad (9.20)$$

Daraus folgt, daß die Strahlungstemperatur des CMB innerhalb eines Raumwinkelements von 1 arc nicht in kausalem Kontakt zu jener im benachbarten Raumwinkelement sein konnte. Wir erwarten also auf einer Beobachtungsskala von ≥ 1 arc oder mehr Schwankungen im CMB, da diese Raumwinkelemente zum Zeitpunkt der Photonenemission eine unterschiedliche Temperatur hatten.

9.1.3 Problem der Raumzeit

Wegen des endlichen Alters des Universums ist der Teilchenhorizont heute größer als zu jeder früheren Zeit. Dies impliziert, daß das Universum größer

ist, als der heutige Vergangenheits-Lichtkegel. Mit der Zeit bewegen sich also immer mehr Regionen in unseren Horizont hinein, mit welchen wir dann in kausalem Kontakt stehen. Die Frage der Größe des Universums wird somit bedeutungslos, es stellt sich vielmehr die Frage nach dem Durchmesser seines Horizontes in Abhängigkeit der Zeit.

In Gl. (9.20) wurde berechnet, daß der Teilchenhorizont zum Zeitpunkt der Rekombination nur einen Winkel von ca. 1° im heutigen Horizont einnimmt. Größere Strukturen als 1° müssen also danach entstanden sein. Die Größe von Superclustern ist so enorm, daß diese eigentlich erst kürzlich entstanden sein können, was aber wiederum im Gegensatz zu Beobachtungen bezüglich des Alters von Quasaren und Galaxien in ihnen steht.

Zur Zeit der GUTs war die Temperatur um einen Faktor 4.4×10^{27} höher als heute. Um diesen Betrag nahm auch der Skalenfaktor $S(t)$ zu, was bei einer heute angenommenen Größe von $2000 h^{-1} \text{ Mpc} = 6 \times 10^{25} \text{ m}$ zu einer Größe von 2 cm zum Zeitpunkt der GUTs führt. Die Ausdehnung und der Horizont des Universums sind aber nicht das Gleiche, denn die Größe des Horizontes hat nahezu mit dem Quadrat des Skalenfaktors zugenommen.

$$\frac{t_0}{t_{\text{GUT}}} = \left(\frac{g_{\text{eff}}(T_{\text{GUT}})}{g_{\text{eff}}(T_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T_{\text{GUT}}}{T_0} \right)^2 \left(\frac{T_{\text{rec}}}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 3.1 \times 10^{54} \quad (9.21)$$

Zur Zeit der GUTs war der Teilchenhorizont nur $3.8 \times 10^{-27} \text{ cm}$ groß. Um die heutige Homogenität zu erreichen, muß jene um den Faktor 5×10^{26} größer gewesen sein, als die Ausdehnung der Gebiete, die damals in kausalem Kontakt waren! Warum aber liefen die Phasenübergänge zur Zeit der GUTs alle gleichmäßig in Gebieten ab, die kausal völlig getrennt waren?

Es sei noch angemerkt, daß in Domänen — sofern diese denn existierten — in denen die Phasenübergänge nicht komplett beendet wurden, die Physik wie wir sie kennen nicht mehr gültig ist. Diese Domänen sind durch sehr energiereiche Wände, welche *topologische Defekte* in der Raumzeit sind, vom Rest des Universums getrennt. Kreuzende Wände ergeben dann die *kosmischen Strings*.

9.1.4 Monopolproblem

Eine besondere Art eines topologischen Defektes ist der *magnetische Monopol*. Zerteilt man einen Stabmagneten, so erhält man zwei neue Dipole. In den Maxwell-Gleichungen treten ein elektrischer Term mit der Ladung e als Quelle, und ein magnetischer Term für den keine Quelle existiert, auf. Für das magnetische Feld existieren also, im Gegensatz zu den freien elektrischen Ladungen, keine freien magnetischen Ladungen. Paul A.M. Dirac (1902–1984) schlug 1931 vor, daß die Quantisierung der Ladung des Elektrons die Folge der Existenz mindestens eines freien magnetischen Monopols ist. Die Monopole und Antimonopole entstanden, der Theorie nach, in der Phase der Vereinheitlichung, kurz nach der Planckzeit. Aufgrund von Symmetriebrechung bei der Energieabnahme blieben nach der Zerstrahlung noch einige übrig. Aufgrund ihrer großen

Masse müßten sie heute das Universum wesentlich beeinflussen. Allerdings wurde bisher noch kein einziger solcher Monopol gefunden. Eine Lösung stellt auch hier die Inflation dar, wonach die Monopole stark ausgedünnt wurden, so daß sich nur noch sehr wenige im sichtbaren Universum befinden.

9.1.5 Flachheitsproblem

Gegenwärtig weiß man nicht, ob das Universum geschlossen, offen oder flach ist. Man kann jedoch den Dichteparameter, der diese Zustände charakterisiert, abschätzen. Aus der Nukleosynthese (Kapitel 6.3) wissen wir, daß

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} > 0.1 \quad (9.22)$$

sein muß. Die obere Grenze leitet sich aus dem größt möglichen Alter des Universums ab.

In einem flachen, Materie-dominierten Universum (mit $k = 0$, $\Omega = 1$) haben die Zeit t_z und die Rotverschiebung z den Zusammenhang

$$t_z = \frac{2}{3H_0}(1+z)^{-\frac{3}{2}} \quad (9.23)$$

Das heißt, das gegenwärtige Alter des Universums mit $z = 0$ ist

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \quad (9.24)$$

wie in Abb. 4.2 gezeigt. In diesem Fall wäre die Grösse des Universums $ct_0 = 2h^{-1}Gpc$.

In einem offenen, Materie-dominierten Universum ($k = -1, \Omega < 1$) ist das Alter des Universums gegeben durch

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \left[\frac{2}{1-\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{(1-\Omega_0)^{\frac{3}{2}}} \cosh^{-1}(2\Omega_0^{-1} - 1) \right] \quad (9.25)$$

Dies ist für verschiedene Werte von h in Abb. 9.2 graphisch dargestellt. Der Grenzwert $\Omega = 0$ stellt die langsamste mögliche Expansion dar. Deshalb können wir eine obere Grenze für das Alter des Universums angeben.

$$t_0 < H_0^{-1} \approx 10h^{-1}Gyr. \quad (9.26)$$

Für den Grenzfall $\Omega = 1$ kann der Ausdruck (9.25) entwickelt werden:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \left[1 - \frac{1}{5}(\Omega - 1) + \dots \right] \quad (9.27)$$

Aus (9.25) und (9.27) folgt, daß t_0 eine von Ω abhängige Funktion ist. Je mehr Materie im Universum vorhanden ist, desto wichtiger ist die Abbremsung und desto jünger ist das Universum. Mit einem unteren Grenzwert für t_0 können wir also einen oberen Grenzwert für Ω bestimmen. Dazu ist es notwendig auch

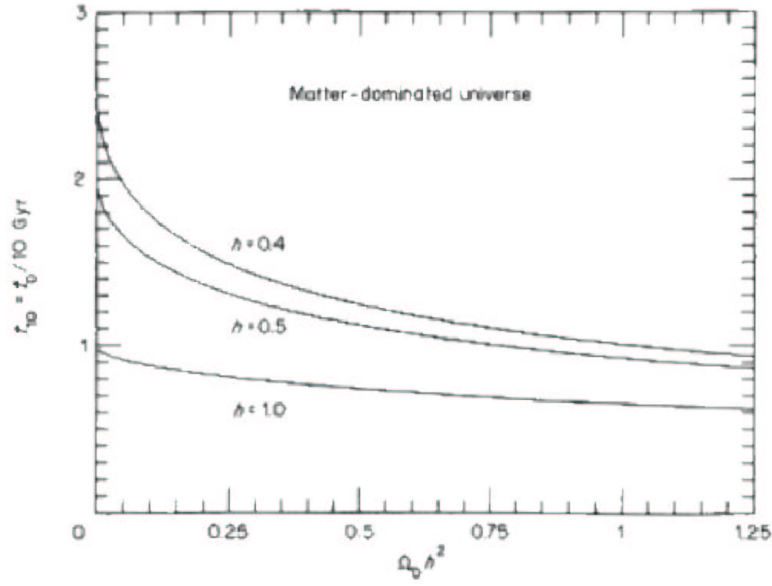


Abbildung 9.2: Das Alter eines Materie - dominierten Universums als Funktion des Dichteparameters Ωh^2 für verschiedene Werte von h

für h einen unteren Grenzwert zu wählen. Wir haben also den Dichteparameter eingegrenzt auf

$$0.1 < \Omega < 1.5 \quad . \quad (9.28)$$

Damit könnte sich jedoch das Universum ganz beträchtlich von einem flachen unterscheiden. Aber auch hier verschafft das Inflationsmodell Abhilfe. Um dies zu zeigen, setzen wir die Relation

$$H^2 = \left(\frac{\dot{S}}{S} \right)^2 \quad (9.29)$$

in die Feldgleichung (4.15). Mit (1.21) ergibt sich daraus

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c} = 1 + \frac{kc^2}{S^2(t)} H^2(t). \quad (9.30)$$

Für ein Strahlungsdominiertes Universum gilt $S(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$. Unter Verwendung von (9.29) ergibt sich (9.30) zu

$$\Omega - 1 \propto kc^2 t \quad (9.31)$$

Dieser Gleichung nach ist Ω also stark zeitabhängig. Fordern wir $\Omega = 1$ für heutige Zeiten, so muß demzufolge $k \approx 10^{-17}$ oder $H \approx 10^{37} s^{-1}$ sein. Dies ist nur durch Inflation zu erreichen.

9.2 Problem der Dynamischen Dunklen Materie

9.2.1 Spiralgalaxien

Spiralgalaxien sind stabile Systeme, deren Materie aus Sternen und interstellarem Gas besteht. Diese bewegt sich auf einer dünnen Scheibe nahezu kreisförmig um das Galaxienzentrum. Man erwartet, daß diese Bewegung dem Keplerschen Gesetz

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (9.32)$$

folgt. Experimentelle Untersuchungen ergaben jedoch, daß die Rotationsgeschwindigkeit nach einem Maximum in einer Entfernung von etwa 5 kpc konstant bleibt (Abb. 9.3).

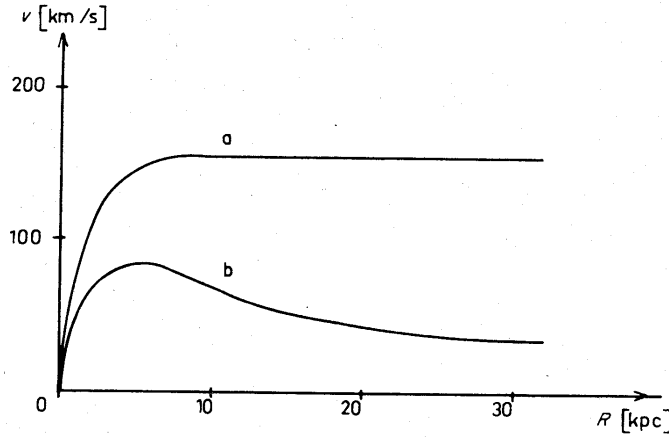


Abbildung 9.3: Rotationsgeschwindigkeiten von Galaxien aus der Dopplerverschiebung (a), bzw. aus der Vorhersage der radialen Lichtverteilung (b)

Eine mögliche Lösung wären weitreichende galaktische Magnetfelder, die das Gas in den äußeren Bereichen des Halos wegen seiner dortigen geringen Dichte maßgeblich beeinflussen könnten. Da sich dieses Feld aber nicht auf die Materie in Form von Sternen auswirken würde, scheint die favorisierte Lösung die Existenz *dunkler Materie* zu sein. Die radiale Massenverteilung $M(R)$ muß mit

$$v = \text{const.} \quad (9.33)$$

aus Gl. (9.32) proportional zu R sein. Die radiale Dichteverteilung ist dann

$$\rho(R) \propto R^{-2} \quad (9.34)$$

Dies ist genau jene Verteilung, die man für Galaxien erwartet, welche von einem Halo aus isothermischem Gas, dessen Druck und Gravitation sich im *virialen Gleichgewicht* befinden, umgeben sind.

9.2.2 Galaxienhaufen

Galaxienhaufen sind Gruppen von Galaxien, die in große Wolken aus heißem Gas eingebettet sind. Aus der Intensität der emittierten Röntgenstrahlung läßt sich auf die Größe der Gaswolken schließen. Die Temperatur des Gases hängt von der Stärke des Gravitationsfeldes ab, so daß auch die Gesamtmenge an Masse im System abgeschätzt werden kann. Diese ist beispielsweise bei der Gruppe HCG62 im Coma-Cluster viel größer, als jene Materie, die sichtbar ist.

Das *Virialtheorem* sagt aus, daß die gesamte kinetische Energie von N Objekten mit einer mittleren Geschwindigkeit v gleich der negativen halben potentiellen Energie ist. Sei r der mittlere Abstand zweier Objekte der mittleren Masse m , so ist die potentielle Energie jedes möglichen $N(N-1)/2$ -Paares gerade $-Gm^2/r$.

$$N \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{N(N-1)}{2} \frac{Gm^2}{r} \quad (9.35)$$

Für einen großen Cluster von Galaxien mit der Gesamtmasse M und dem Radius R vereinfacht sich dies zu

$$M = \frac{2Rv^2}{G} \quad . \quad (9.36)$$

Mittels des Virialtheorems kann man also die Gesamtmenge an dynamischer Materie durch Messungen der Geschwindigkeiten der Galaxien und des Gesamtradius des Haufens berechnen. Man erhält analog zur HCG62-Gruppe auch für große Cluster ein Massendefizit.

9.2.3 Kandidaten Dunkler Materie

Da *heißes Gas* immer auch Strahlung emittiert, bleibt als erste Möglichkeit nur *kaltes Gas* übrig. Das Problem ist jedoch, daß dieses nicht immer kalt bleiben wird. Außerdem könnten selbst riesige Gasmengen nicht die benötigte Menge an Materie aufbringen.

Eine Alternative wären *Staubwolken*, die selbst unsichtbar sind, da sie kalt sind und nicht strahlen. Allerdings würden sie das Licht von Sternen reemittieren, und würden so im Infraroten sichtbar werden. Zur Lösung des Problems wären zudem so große Mengen an Staub nötig, daß sie die Entstehung der Sterne maßgeblich beeinflußt hätten.

Ernstzunehmende Kandidaten könnten *braune Zwerge*, auch *MACHOs* (Massive Compact Halo Objects) genannt, sein. Bei diesen startet das Wasserstoff-Brennen nicht, da sie zuwenig Druck aufbauen können. Somit sind sie nicht direkt sichtbar. Stehen sie allerdings genau vor einem Stern, so verstärken sie als *Gravitationslinse* dessen Strahlung. Dies wurde im Gebiet zwischen Erde und der *Großen Magellanschen Wolke* auch beobachtet.

Schwarze Löcher strahlen selbst nicht, und könnten somit eine Quelle dunkler Materie darstellen. Man nimmt an, daß sie sich im Zentrum von Galaxien befinden und Massen von über $100 M_\odot$ haben. Eine Lösung der Rotationskurven (Abb. 9.3) können sie jedoch nicht sein, da die Dunkle Materie im Halo sitzen müßte.

Alle Möglichkeiten baryonischer dunkler Materie widersprechen der Nukleosynthese. Bei der Alternative nicht-baryonischer dunkler Materie unterscheidet man zwei Gruppen: *heiße dunkle Materie* (HDM) bestehend aus leichten Teilchen, die zur Zeit ihrer Entkopplung aber immer noch relativistisch waren, und *kalte dunkle Materie* (CDM) bestehend aus entweder schweren und damit früh entkoppelnden oder aber superleichten und damit nur superschwach wechselwirkenden Teilchen. Wie aus der Struktur der Galaxien hervorgeht besteht die Materie im Universum maßgeblich aus kalter dunkler oder gemischter heißer und dunkler Materie. Darauf werden wir in Kapitel 10.1.5 noch näher eingehen.

9.3 Neue Inflation: Das chaotische Modell

Andrei Linde nahm an, daß das Universum mit einer Vakuumenergie φ_a startete. Diese sei über einen Horizont der Größe M_P^{-1} bis auf Schwankungen

$$\Delta\varphi_a \approx M_P \ll \varphi_a \quad (9.37)$$

konstant. Mit der Zeit driftet der Wert dieses Feldes nach φ_0 beim wahren Minimum $V(\varphi_0)$ des Potentials. Dieses Modell nennt man *neue Inflation* nach Linde, Albrecht und Steinhardt.

Kausal verbundene Räume können nur von der Größe M_P^{-1} sein. Man kann sich das Universum also wie einen chaotischen Schaum vorstellen, der aus kausal getrennten *Blasen* besteht, in denen unterschiedliche Anfangsbedingungen herrschen. Lediglich eine dieser Blasen hat sich zu unserem Universum entwickelt. Was mit den anderen passiert ist, läßt sich nicht sagen. Andrei Linde nannte dies *chaotische Inflation*.

Auf einer Zeitskala von $\Delta t = \hbar/M_P c^2$ ergibt sich nach Heisenberg eine Energieunschärfe von

$$\Delta E > \frac{\hbar}{\Delta t} = M_P c^2 \quad . \quad (9.38)$$

Mit $\hbar = c = 1$ folgt für die Unschärfe der Energiedichte

$$\Delta\rho = \frac{\Delta E}{(\Delta r)^3} = \frac{\Delta E}{(\Delta t)^3} = M_P^4 \quad . \quad (9.39)$$

Im einfachsten Fall — ein Skalarfeld φ koppelt an die Gravitation an — ist die Gesamtenergie

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + V(\varphi) \quad . \quad (9.40)$$

Bei einem genügend homogenen und stationären Feld φ_a spielt nur der Term $V(\varphi)$ eine Rolle. Zur Beschreibung der Dynamik genügen dann die Friedmann-Gleichungen mit $\rho \rightarrow V(\varphi)$

$$H^2 + \frac{k}{S^2} = \frac{8\pi}{3M_P^2} V(\varphi) \quad , \quad (9.41)$$

und eine Differentialgleichung, die man aus der *Klein-Gordon-Gleichung* erhält

$$3H\dot{\varphi} = -\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \quad . \quad (9.42)$$

Ursprünglich enthielten alle Regionen der Größen $H^{-1} = M_P^{-1}$ Inhomogenitäten innerhalb ihrer jeweiligen Ereignishorizonte. Während des inflationären deSitter-Szenarios würde sich ein Beobachter von einem schwarzen Loch mit dem Ereignishorizont H^{-1} umgeben sehen. Innerhalb einer Zeit der Größenordnung H^{-1} hätten alle Inhomogenitäten den Hubble-Radius durchwandert, und würden somit die Physik innerhalb des deSitter-Universums nicht mehr beeinflussen. Dieses selbst würde deshalb immer homogener und flacher werden.

Setzen wir in eine allgemein gewählte Parametrisierung des Potentials

$$V(\varphi) \approx \frac{\kappa \varphi^n}{n M_P^{-4}} \approx M_P^4 \quad (9.43)$$

die Gln. (9.41) und (9.42) ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{n^2 M_P^2}{48\pi \varphi^2} V(\varphi) \quad . \quad (9.44)$$

Mit $n = 2$ und einem Potential

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m_\varphi^2 \varphi^2 \quad (9.45)$$

ergibt sich die Zeitabhängigkeit des Feldes zu

$$\varphi(t) = \varphi_a - \frac{m_\varphi M_P}{2\sqrt{3}\pi} t \equiv \varphi_a \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \quad , \quad (9.46)$$

wobei τ die charakteristische Zeitskala der Expansion ist.

Zu frühen Zeiten $t \ll \tau$ bleibt das Skalarfeld fast konstant. Es wechselt nur langsam von φ_a zu seinem endgültigen Wert φ_0 . Der Skalenfaktor wächst dann exponentiell mit

$$S(t) = S(t_a) e^{HT - \frac{1}{6} m_\varphi^2 t^2} \quad , \quad (9.47)$$

wobei

$$H = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{m_\varphi}{M_P} \varphi_a \quad . \quad (9.48)$$

Mit annähern des Feldes an den Wert φ_0 endet die Inflation.

Zur Zeit τ hat sich das Universum von der linearen Größe $S(t_a)$ zu

$$S(\tau) \approx S(t_a)e^{H\tau} = S(t_a) \exp \left[\frac{4\pi\varphi_a^2}{M_P^2} \right] \quad (9.49)$$

ausgedehnt. Die Masse m_φ der Skalarteilchen erhält man aus der Anisotropie des Mikrowellenhintergrundes und dem *Sachs-Wolfe-Effekt* zu

$$m_\varphi \approx 10^{-4} M_P \quad . \quad (9.50)$$

Setzt man dies in Gl. (9.49) ein, so erhält man den numerischen Wert

$$S(\tau) \approx 10^{-33} \text{ cm} \cdot e^{4\pi \cdot 10^8} \approx 10^{5.5 \times 10^8} \text{ cm} \quad . \quad (9.51)$$

Alle zuvor diskutierten Probleme verschwinden damit. Die Homogenität, Flachheit und Isotropie des Universums sind nun Folgen des Skalarfeldes φ , das in einem Gebiet M_P^{-1} genügend groß war. Die Inflation fand im Zeitintervall $(10^{-43} \dots 10^{-35})$ s statt.

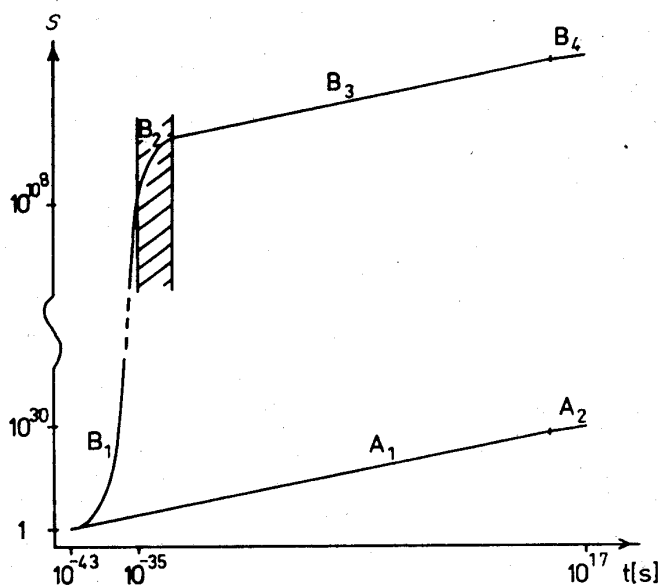


Abbildung 9.4: Verlauf der Expansion seit der Planckzeit im Friedmann-Modell (A) und im inflationären Szenario (B).

In Abb. 9.4 ist der Verlauf der Expansion grafisch dargestellt. Während der Zeitspanne B_1 expandiert das Universum exponentiell. Die Inflation kommt während B_2 dann durch Wiederaufwärmen des Universums zur Ruhe. Der weitere Verlauf B_3 folgt der Friedmann-Expansion A_1 in der strahlungsdominierten Ära. Der Übergang zum materiedominierten Universum findet bei B_4 , respektive A_2 statt.

9.4 Übungen

1. Leiten Sie analog zu Gl. (9.25) einen Ausdruck für das Alter eines geschlossenen Universums bei Materiedominanz her.
2. Wie groß ist die schwache Hyperladung $Y = B - L$ für das X-Boson? Benutzen Sie dafür die Gln. (9.7–9.8).
3. Der CP-verletzende Zerfall der X-Bosonen könnte die Quelle der Baryonen-Asymmetrie im Universum sein. Ihre Existenz würde außerdem ein instabiles Proton zur Folge haben. Ein möglicher Zerfall wäre $p \rightarrow \pi^0 e^+$. Die Zerfallsrate dafür ist mit der charakteristischen Zerfallsenergie E gegeben durch

$$\Gamma \approx \frac{\alpha^2 E^5}{M_X^4} \quad . \quad (9.52)$$

Berechnen Sie mit $E = m_p$ und $\alpha \approx 1/40$ die Einschränkung (in GeV), daß M_X der experimentell gegebenen Grenze $\tau_p = \Gamma^{-1} > 10^{32}$ yr für die Lebensdauer der Protonen, gehorchen muß. Vergleichen Sie mit Gl. (9.15).

4. Es sei ρ die Masse der K-Giganten in der Zentralebene $z = 0$ der Galaxie, und v_z die mittlere zufällige Geschwindigkeit dieser Sterne in z -Richtung. Der Druck ist dann

$$p|_{z=0} = \rho v_z^2 \quad . \quad (9.53)$$

In einem statischen Zustand müssen gleich viele Sterne in z -Richtung und dazu entgegengesetzt die Ebene durchqueren. Der partielle Druck p muß das Gewicht der Sterne pro Einheitsfläche auf einer Seite der Scheibe kompensieren (Hydrostatisches Gleichgewicht eines idealen Gases). Sei D die effektive Dicke der Zentralebene, und $\langle g_z \rangle$ der Mittelwert der z -Komponente des galaktischen Gravitationsfeldes. Das Gewicht der Sterne über einer Einheitsfläche ist $\rho \langle g_z \rangle D$. Leiten Sie die Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht ab, und zeigen Sie, daß

$$\langle g_z \rangle = \frac{v_z^2}{D} \quad . \quad (9.54)$$

Berechnen Sie $\langle g_z \rangle$ mit den Werten $v_z = 18$ km/s und $D = 300$ pc.

5. Die mittlere freie Weglänge ℓ von Photonen im homogenen interstellaren Staub ergibt sich aus der Gleichung $\ell = 1/An$, wobei A die durchschnittliche Oberfläche eines Sterns und n die Anzahlldichte ist. Die Staubkörnchen haben einen Radius von 10^{-5} cm. Die Position unseres Sonnensystems in der Galaxie ist bei $\ell \approx 1$ kpc. Wie hoch ist die Anzahlldichte der Staubkörnchen?

6. Leiten Sie Gl. (9.36) her. Im Durchschnitt ist das Quadrat der mittleren Geschwindigkeiten v^2 von Galaxien in kugelförmigen Haufen dreimal größer, als V^2 . V ist hier die mittlere Geschwindigkeit einer Galaxie bezüglich des Zentrums des Haufens. Berechnen Sie M für die Werte $V = 1000 \text{ km/s}$ und $R = 1 \text{ Mpc}$ in Einheiten von $M_\odot$.
7. Nehmen Sie an, die Galaxien hätten eine flache Rotationskurve bis zu R_{max} . Die Gesamtmasse innerhalb dieses Radius ist gegeben durch Gl. (9.32), wobei $v = 220 \text{ km}$ angenommen wird. Die Anzahl der Galaxien sei $n = 0.01 h^3 \text{ Mpc}^{-3}$. Zeigen Sie, daß $\Omega = 1$, wenn R_{max} den intergalaktischen Abstand von $2.5 h^{-1} \text{ Mpc}$ übersteigt.
8. Leiten Sie $\phi(t)$ für ein Potential $V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda \phi^4$ her.
9. Nehmen Sie an, daß das über den Hubble-Radius H^{-1} gemittelte Skalarfeld um den Wert ψ variiert. Der Feldgradient in dieser Fluktuation ist $\nabla\psi = H\psi$, und die Energiedichte ist $H^2\psi^2$. Wie groß ist die Energie dieser Fluktuation integriert über das Hubble-Volumen? Benutzen Sie die Zeitskala H^{-1} für die Änderungen der Fluktuationen, und die Unbestimmtheitsrelation, um das Minimum der Energie herzuleiten.
10. Gebiete, die heute unter einer Rotverschiebung $z = 1$ beobachtet werden, befinden sich in einem Abstand H_0^{-1} . Der Rückgang der Geschwindigkeit eines Objektes in der Entfernung x ist $\dot{S}x$. Zeigen Sie, daß dieser Rückgang am Ende der Inflation

$$\dot{S}x = \frac{H_0 S_0 x z_r}{\sqrt{z_{\text{eq}}}} \quad (9.55)$$

ist. z_r ist dabei die Rotverschiebung am Ende der Inflation. Berechnen Sie diese Geschwindigkeit. Der Dichtekontrast stieg um den Faktor

$$\delta = \frac{z_r^2}{z_{\text{eq}}} \quad (9.56)$$

an. Welchen Wert hatte er zu Ende der Inflation, wenn heute der Wert $\delta \approx 10^{-4}$ ist?

Kapitel 10

Entstehung von Galaxien

In diesem Kapitel soll erklärt werden, wo und wie sich die Materie anhäufte, um schließlich an die 10^9 Galaxien zu bilden. Obgleich es keine überzeugende Theorie der Galaxienbildung gibt, sollen hier die Modelle der Dichtefluktuationen, der kalten dunklen Materie, sowie der heißen dunklen Materie betrachtet werden.

10.1 Dichtefluktuationen

10.1.1 Materieverteilung

Ein Grund für eine Anisotropie ist, daß die Materie im Universum nicht exakt homogen verteilt ist. Es gibt Materieanhäufungen in Form von Galaxien, Galaxiengruppen, Supergalaxien und Strings aus Supergalaxien. Der Grund dafür muß eine Inhomogenität in der Energieverteilung zur Zeit der Entkopplung gewesen sein, was aber wiederum in einer Inhomogenität bezüglich des CMB resultieren würde.

10.1.2 Quadrupol-Anisotropie

Dichtefluktuationen scheiden bei Winkeln von 90° aus, da sie auf den Teilchenhorizont von 2° beschränkt sind. Die Hälfte der Anisotropie $\delta T/T$ des CMB kann somit nur einer *Quadrupol-Anisotropie* zugeschrieben werden, welche im wesentlichen kosmologischen Ursprungs ist, also auf einer nicht exakt kugelsymmetrischen Expansion des Universums beruht. Dies steht im Widerspruch zum Kosmologischen Prinzip, und damit auch zur Friedmann-Robertson-Walker-Kosmologie. Die andere Hälfte sind immanente Fluktuationen im CMB über weite Bereiche, die ein Indiz für Strukturen größer als 500 Mpc, und damit größer als beobachtete Supercluster, sind.

Diese großräumigen Fluktuationen können sich aber nur innerhalb unseres Ereignishorizontes gebildet haben. Eine Erklärung gibt die Modifikation unseres Standardmodells zu frühen Zeiten. Dieses Modell der *Kosmischen Inflation* wurde in Kapitel 9 bereits erläutert.

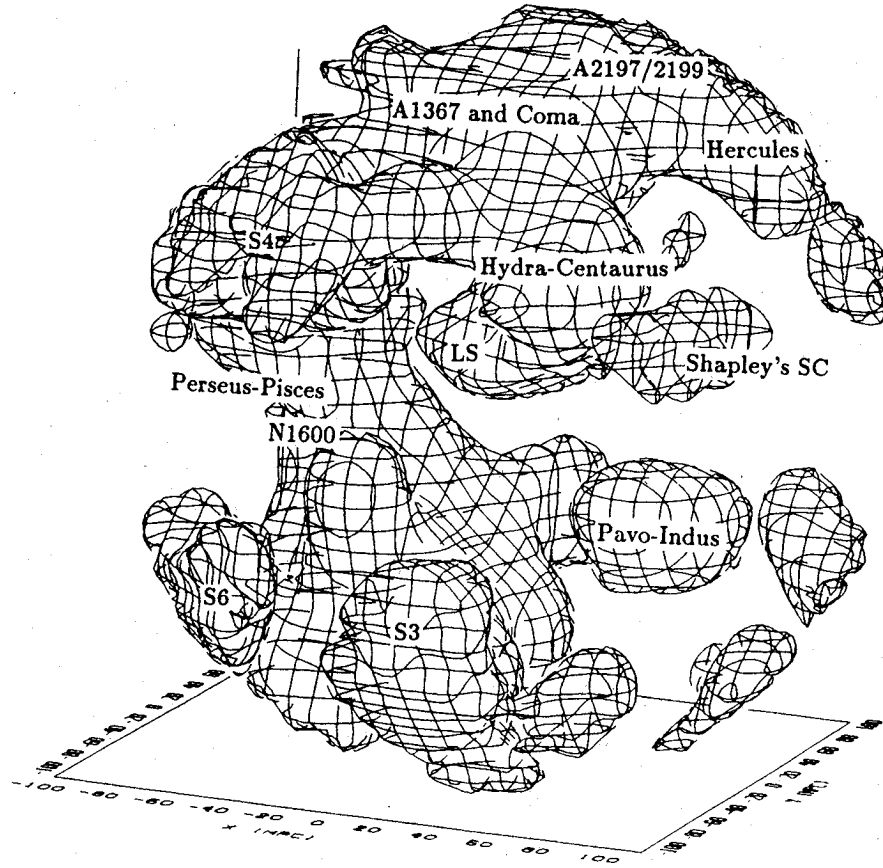


Abbildung 10.1: Die Verteilung der Galaxien im lokalen Universum. Gezeichnet sind Linien gleichen Druckes innerhalb eines Radius von 100 Mpc um das Zentrum der Milchstraße.

Fluktuationen der Temperatur in Richtung α um einen Mittelwert können durch die *Autokorrelationsfunktion* $C(\theta)$ analysiert werden, wobei θ der Winkel zwischen zwei Beobachtungsrichtungen ist.

$$C(\theta) = \langle T(\alpha) T(\alpha + \theta) \rangle \quad (10.1)$$

Dies kann durch eine Summe von *Legendre-Polynomen* $P_\ell(\theta)$ der Ordnung ℓ mit den Koeffizienten a_ℓ^2 ausgedrückt werden.

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=2}^{\infty} a_\ell^2 (2\ell + 1) P_\ell(\theta) \quad (10.2)$$

Der Fall $\ell = 1$ eines Dipols kann vernachlässigt werden. Die Koeffizienten werden den Meßergebnissen von COBE, welche bis zur Ordnung $\ell = 20$ reichen, angepaßt. So erhält man eine Dichteverteilung der Temperaturfluktuationen (A in Abb. 10.2). Ein anderes Experiment am Südpol erreichte eine Auflösung bis

zur 400. Ordnung (B in Abb. 10.2). Da dieses jedoch für einen anderen Bereich sowohl im Energiespektrum, als auch ein Raumwinkelement angelegt war, kann es die Meßergebnisse von COBE weder widerlegen noch bestätigen. Weitere Messungen wurden auf Teneriffa (C in Abb. 10.2) und am MIT (D in Abb. 10.2) durchgeführt.

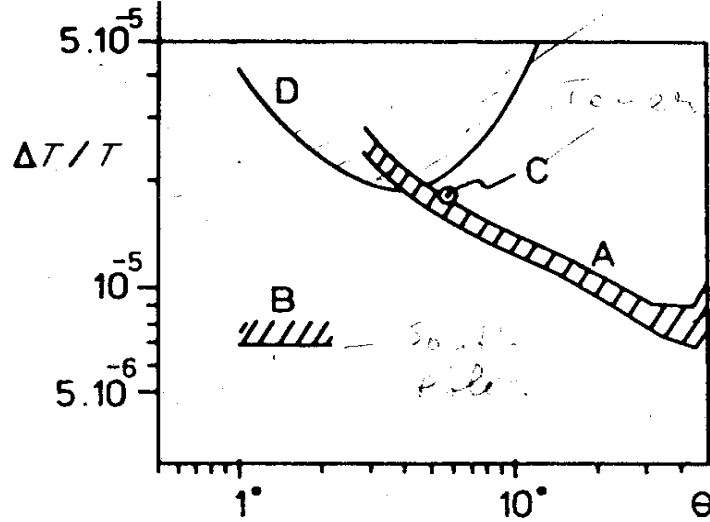


Abbildung 10.2: Verschiedene Messungen der Anisotropie $\Delta T/T$ des CMB als Funktion des Korrelationswinkels θ .

10.1.3 Theoretische Beschreibung

Die Materieverteilung im Universum kann annähernd durch die Hydrodynamik einer viskosen Flüssigkeit beschrieben werden. In einer solchen gibt es Dichtefluktuationen um eine mittlere Dichte $\bar{\rho}(t)$. Der Unterschied zu gewöhnlichen Flüssigkeiten liegt dabei in der Art des Druckes, der im Universum durch Strahlung und Gravitationsanziehung erzeugt wird. Genau dieser Unterschied bewirkt, daß Gebiete größerer Dichte schließlich zu großen Inhomogenitäten anwachsen können.

Es sei die Dichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ eine Funktion der Raumkoordinate $\mathbf{r}$ und der Zeit t . Die Abweichung von der mittleren Dichte am Ort $\mathbf{r}$ ist dann

$$\delta(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}, \quad (10.3)$$

was auch als *Massendichte-Kontrast* bezeichnet wird.

Ein zufälliges Ensemble von Fluktuationen kann mathematisch durch eine endliche Summe unabhängiger Wellen mit der charakteristischen Wellenzahl k und der Amplitude δ_l beschrieben werden.

$$\delta(\mathbf{r}, t) \propto \sum \delta_k(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (10.4)$$

Eine Dichtefluktuation kann aber auch durch die Masse M , die sich innerhalb eines Volumenbereiches mit dem Radius λ bewegt, beschrieben werden. Mit $M \propto \lambda^3$ folgt

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \propto M^{-1/3} \quad . \quad (10.5)$$

Die *Autokorrelationsfunktion der Masse*,

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \rangle \propto \sum \langle |\delta_k(t)|^2 \rangle e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad , \quad (10.6)$$

mißt den Zusammenhang im Dichtekontrast an zwei Punkten $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_1$. Die Massenfluktuationen verhalten sich dann wie

$$P(k) = \langle |\delta_k(t)|^2 \rangle \quad . \quad (10.7)$$

Nehmen wir den einfachsten eines Potenzgesetzes

$$P(k) \propto k^n \quad , \quad (10.8)$$

wobei n der *Spektralindex* ist, an. Mit Gl. (10.5) sieht man dann, daß jede Mode δ_k proportional zu einer Potenz der charakteristischen Masse M ist.

10.1.4 Experimentelle Beschreibung

Betrachten wir jetzt die tatsächliche Verteilung der Galaxien und Galaxienhaufen. Dazu nehmen wir an, die Anzahldichte der Galaxien im Volumenelement dV ist n_G . Die Wahrscheinlichkeit, eine Galaxie in einem Raumsegment zu finden ist dann

$$dP = n_G dV \quad . \quad (10.9)$$

Mit der Annahme, daß die Galaxien unabhängig voneinander verteilt sind, ist die Wahrscheinlichkeit, eine Galaxie in zwei zufälligen Volumenelementen dV_1 und dV_2 zu finden, gegeben durch

$$dP_{12} = n_G^2 dV_1 dV_2 \quad . \quad (10.10)$$

Treten die Galaxien aber auf einer charakteristischen Länge r_c gehäuft auf, so sind die Wahrscheinlichkeiten bezüglich verschiedener Volumenelemente nicht mehr unabhängig, sondern korreliert.

$$dP_{12} = n_G^2 [1 + \xi(r/r_c)] dV_1 dV_2 \quad (10.11)$$

Vergleicht man die *Zweipunkt-Autokorrelationsfunktion* $\xi(r/r_c)$ mit Gl. (10.6), so leitet sich folgende empirische Form ab.

$$\xi(r/r_c) = (r/r_c)^{-\gamma} \quad (10.12)$$

$$r_c = 5.4 h^{-1} \text{ Mpc} \quad , \quad \gamma = 1.77$$

10.1.5 Jeans-Grenze

Aus den Friedmann-Gleichungen folgt, daß die Gravitationskraft eine homogene Materieverteilung instabil werden läßt, d.h. die Materieverteilung expandiert oder kontrahiert. Ändert sich also die Materieverteilung, so ändert sich damit auch der kosmische Skalenfaktor $S(\mathbf{r}, t)$ in Abhängigkeit von Ort und Zeit. Expandiert das Universum im Mittel, so gibt es auch überdichte Regionen, in denen Gravitationskräfte den Druck überkompensieren, und sich die Materie somit lokal zusammen zieht. Umgekehrt gibt es auch unterdichte Regionen, in denen sich Fluktuationen wie Schallwellen in einem viskosen Medium ausbreiten, und dabei Energie in benachbarte Regionen transportieren.

Der Unterschied zwischen diesen beiden Fällen kann mittels klassischer Hilfsmittel untersucht werden. Die Zeit, die eine Masse für den Fall in das Zentrum eines inhomogenen Gravitationsfeldes G benötigt, ist

$$t_G = \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \quad . \quad (10.13)$$

Die Schallgeschwindigkeit sei c_S . In der Zeit

$$t_S = \frac{\lambda}{c_S} \quad (10.14)$$

haben sich die Schallwellen um eine Wellenlänge fortbewegt. Für $t_G < t_S$ ziehen sich die Regionen höherer Dichte zusammen, und der Unterschied in der Fluktuation wird größer, da umgebende Materie mit angezogen wird. Umgekehrt bewegen sich die Fluktuationen mit konstanter Amplitude, vergleichbar den Schallwellen. Für $t_G = t_S$ erhält man die *Jeans-Wellenlänge* $\lambda = \lambda_J$, benannt nach *Sir James Jeans* (1877–1946).

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}} c_S \quad (10.15)$$

Die Masse innerhalb einer Kugel des Radius λ_J heißt *Jeans-Masse*.

$$M_J = \frac{4}{3} \pi \lambda_J^3 \rho \quad (10.16)$$

Im rechten Teil der Abbildung 10.3 ist eine Simulation der Materieverteilung in unserem Universum zu sehen. Dabei wurde davon ausgegangen, daß die dunkle Materie lediglich aus Neutrinos besteht. Sie haben eine sehr kleine Masse und damit auch eine geringe Dichte. Dies führt nach (10.15) zu einer großen Jeans-Wellenlänge, was sich in der Abbildung als langgezogene Materieverdichtungen widerspiegelt (Pfannkuchenmodell). Vergleicht man dieses Resultat mit der linken Abbildung, in der die tatsächliche Materieverteilung sehr homogen ist, so kommt man zu dem Ergebnis, daß es weitere Teilchen geben muß (CDM), die ebenso wie die Neutrinos schwach wechselwirken aber schwerer sind.

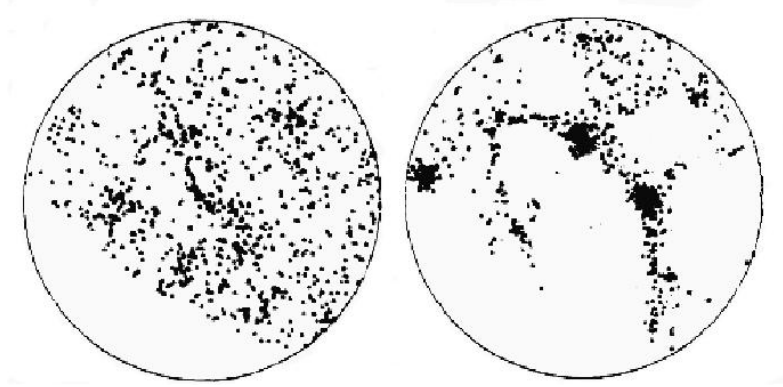


Abbildung 10.3: Im linken Bild ist die tatsächlich beobachtete Materieverteilung zu sehen. Das rechte Bild zeigt eine Simulation, die nur von heißer dunkler Materie ausgeht.

10.1.6 Adiabatische und isokekrümmte Fluktuationen

Bei *adiabatischen* oder *gekrümmten* Fluktuationen ändern sich die lokalen Anzahldichten der Baryonen und Photonen gleichmäßig. Diese können durch Irregularitäten in der Metrik entstanden sein. Inflation jenseits des Hubble-Radius hat diese dann verstärkt. Ist der Krümmungsradius r_U kleiner als die Größe d der fluktuierenden Region, so wird diese zu einem schwarzen Loch kollabieren.

Isokekrümmte Fluktuationen starten mit homogener Massendichte, die Krümmung der Metrik spielt also keine Rolle. Die Variationen in der Materieverteilung unabhängig vom Druck entstehen schließlich erst durch kleine Fluktuationen innerhalb gleicher Teilchensorten. Obgleich diese Teilchen keinen Einfluß außerhalb ihres Horizontes haben, kann dieser durch Inflation weit über $r_H = H^{-1}$ angewachsen sein.

10.1.7 Postinflationäre Szenarien

Während der Friedmann-Expansion wird der Hubble-Radius größer als die inflationären Regionen der Fluktuationen. Diese kehren somit in Gebiete zurück, in denen die Wellenlänge dem Hubble-Radius entspricht.

Fluktuationen großer Wellenlängen wachsen mit der Expansion an. Jene kurzer Wellenlängen $\lambda \approx r_u = r_H$ können sich von der Expansion lösen, und in gebundene Systeme von der Größe von Galaxien oder Galaxienhaufen kollabieren. Noch kürzere Wellenlängen erreichen das Stadium des Kollabierens nie, und werden durch zufällig verteilte Schallwellen schließlich ausgelöscht.

Während der strahlungsdominierten Ära ist bis zur Rekombination die Erzeugung und das Wachstum baryonischer Dichtefluktuationen gestört. Die „Flüssigkeit“ des Universums bleibt viskos, und dämpft alle kleineren Fluktuationen

stark ab. Zum Zeitpunkt der Rekombination verschwinden alle freien Elektronen, und die Dichtefluktuationen können ungehindert größer werden.

Das Gas in einigen kontrahierenden Wolken heizt sich dabei so stark auf, daß es ionisiert wird. Kleine Wolken schrumpfen dann schnell, zerstrahlen ihre Gravitationsenergie, und zerbrechen schließlich. Große Wolken schrumpfen langsam und kühlen sich durch Thomson-Streuung der Elektronen selbständig.

10.1.8 Randbedingungen

Zu Beginn muß das Universum groß genug gewesen sein, um Platz für die ersten geformten Strukturen gehabt zu haben. Waren dies Galaxien heutiger Ausmaße, so kann mit ihrer Anzahlichte der Zeitpunkt ihres Entstehens bestimmt werden.

Ein weiterer Anhaltspunkt dafür ist die heutige Dichte der Strukturen, da der Dichtekontrast während der Entstehung größer als die mittlere Dichte zu jener Zeit gewesen sein muß. Da seit dem der Kontrast mit S^3 zunahm, ergibt sich als untere Grenze der Entstehungszeit

$$S = 1 + z \approx 2.5 \Omega^{-1/3} . \quad (10.17)$$

10.2 Kalte dunkle Materie: WIMPs

Teilchen die zum Zeitpunkt $\rho_{\text{rad}} = \rho_{\text{mat}}$ sehr langsam sind, sind Kandidaten für die *kalte dunkle Materie* (*cold dark matter*, *CDM*). Sind diese massiv und wechselwirken schwach *WIMPs* (weakly interacting massive particles), werden sie früher als die Leptonen nicht-relativistisch, und entkoppeln. Beispiele im supersymmetrischen Modell sind hierfür entweder das *Photino* oder das *Zino*, sowie eine Linearkombination selbiger, das *Gaugino*.

Die Alternative wären sehr leichte Teilchen mit superschwacher Wechselwirkung, so daß sie bereits entkoppeln können, wenn bei t_{eq} ihre Wechselwirkungsrate kleiner wird, als die Expansionsrate. Beispiele hierfür sind das *Gravitino*, sowie das *Axion*, ein fast masseloses Boson.

Nachdem die WIMPs vom heißen Plasma entkoppeln, können sie in Regionen geringerer Dichte entweichen, und so kleine Inhomogenitäten ausgleichen. Dies definiert eine charakteristische Wellenlänge

$$\lambda_{\text{free}} = 40 \left(\frac{30 \text{ eV}}{m_{dm}} \right) \text{ Mpc} , \quad (10.18)$$

und eine charakteristische Massenskala

$$M_{\text{free}} = 3 \times 10^{15} \left(\frac{30 \text{ eV}}{m_{dm}} \right)^2 M_{\odot} , \quad (10.19)$$

für Teilchen der Masse m_{dm} .

Nicht-baryonische WIMPs sollten zusammen mit den baryonischen MACHOs in den Halos der Galaxien nachweisbar sein. Sollte die Dichte in unserem Halo ausreichend hoch sein, so müßten sie auch in der Sonne zu finden sein. Eine zu erwartende Änderung im Energietransport innerhalb der Sonne, und somit auch in der Sonnendynamik konnte jedoch noch nicht nachgewiesen werden. Auch für die zu erwartende jährliche Änderung des Flusses der Halo-WIMPs auf der Erde existieren noch keine geeigneten Detektoren.

Die leichtesten WIMPs sind zur Zeit t_{eq} langsam genug, um in Fluktuationen galaktischer Größenordnungen gebunden zu werden. Das CDM-Szenario ist jedoch nicht in der Lage, größere Strukturen wie Galaxienhaufen und Supergalaxien der Größenordnung $10^{15} M_{\odot}$ zu bilden. Man spricht deshalb von einem *down-top* Szenario.

Betrachtet man die Verteilung der Galaxien, so lassen sich Schichten unterschiedlicher Dichten erkennen. Die größte bekannte ist dabei die *Great Wall* mit einer Länge von $170 h^{-1} \text{ Mpc}$, und einer Dicke von $60 h^{-1} \text{ Mpc}$. Der Infrarot-Satellit IRAS hat den Himmel auf einer Entfernung von $140 h^{-1} \text{ Mpc}$ untersucht. Die verschiedenen Supercluster haben sich dabei deutlich abgezeichnet. (Abb. 10.1)

10.3 Heiße dunkle Materie: Neutrinos

Neutrinos tragen nicht zur leuchtenden Materie bei. Sie sind relativistisch und ihre Masse ist unbekannt, weshalb sie Kandidaten für *heiße dunkle Materie* (*hot dark matter*, *HDM*) sein könnten.

Ihre Anzahldichte ist

$$N_{\nu} = \frac{3}{11} N_{\gamma} \approx 112 \frac{1}{\text{cm}^3} \quad . \quad (10.20)$$

Sollte ihre mittlere Masse

$$m_{\nu} = \Omega_{\nu} \frac{\rho_c}{N_{\nu}} \approx 95 \Omega_{\nu} h^2 \text{ eV} \quad (10.21)$$

sein, so könnten die Neutrinos — alle Flavours eingeschlossen — so zu Ω_{ν} beitragen, daß das Universum geschlossen wird.

Das Elektron-Neutrino ist mit nur wenigen eV zu leicht, um als dunkle Materie fungieren zu können. Das Tau-Neutrino, welches nicht oszilliert, koppelte schon lange vor der materiedominierten Ära aus dem heißen Plasma aus, und blieb wegen seiner geringen Masse lange Zeit relativistisch. Deshalb bezeichnet man diese als *heiße* dunkle Materie.

In kugelsymmetrischen Gaswolken wird eine Kontraktion durch eine zu dieser orthogonalen Expansion kompensiert. Die ersten Strukturen, die durch solche Wolken entstanden, können durch das *Pfannkuchen-Modell* von Zel'dovich am besten beschrieben werden. Der Abstand zwischen solchen Strukturen ist ungefähr $40 \Omega^{-1} h^{-2} \text{ Mpc}$. Damit besteht keine Ähnlichkeit zu den zuvor beschriebenen Schichten (vgl. Great Wall). Mit dem Kollaps dieser „Pfannkuchen“ zerfallen diese schließlich in kleinere Strukturen, weshalb man hier von einem *top-down* Szenario spricht.

Wegen des *Pauli-Prinzips* können sich zwei identische Fermionen — was hier bedeutet, daß sie gleichen Spin, und ein um Δp unterschiedliches Moment haben — nicht beliebig nahe kommen. Ihr minimaler Abstand folgt aus der Unschärferelation von Heisenberg zu

$$\Delta x \Delta p \leq \hbar \quad . \quad (10.22)$$

Nur n_{Spin} Neutrinos passen in ein Phasenraumelement $(\Delta x)^3 (\Delta p)^3$. Sei R der Radius der Wolke, und $m_\nu v$ das moment der Neutrinos, dann ist die maximal erlaubte Anzahl an Neutrinos gegeben durch

$$N_{\text{max}} = n_{\text{Spin}} \frac{(\Delta x)^3 (\Delta p)^3}{2\pi^3} \propto n_{\text{Spin}} R^3 (m_\nu v)^3 \quad . \quad (10.23)$$

Ist die Masse der Neutrino-Wolke

$$M = m_\nu N < m_\nu N_{\text{max}} \quad , \quad (10.24)$$

so erhält man daraus eine untere Grenze für die Neutrinomasse. Genaue Rechnungen ergeben, daß leichte Neutrinos nicht für die notwendige Menge an dunkler Materie verantwortlich gemacht werden können.

10.4 Übungen

1. Um die Jeans-Wellenlänge λ_J und -Masse M_J herzuleiten, gehen wir von einer Masse $M_J = \rho \lambda_J^3$ eines klassischen idealen Gases aus. Dieses unterliegt einem Gravitationskollaps, sobald der interne Druck $P = \rho kT/m$ dem Gewicht einer Massensäule der Einheitsfläche und Höhe λ_J nicht mehr Stand halten kann. m sei hier die mittlere Masse der Gasteilchen. Zeigen Sie, daß

$$\frac{GM_J}{\lambda_J^2} \rho \lambda_J \geq \frac{\rho kT}{m} \quad (10.25)$$

zu Gl. (10.16) führt.

2. Diskutieren Sie unter der Annahme, das $h = 0.5$ und $m(\nu_\tau) = 20 \text{ eV}$ die Eigenschaften eines zusätzlichen schweren Neutrinos, das benötigt wird, um das Universum zu schließen, und um die Galaxienbildung zu erklären. Experimente zeigten, daß dieses Neutrino eine Masse größer als 45 GeV haben müßte.

3. Bestimmen Sie die Rotverschiebung zur Zeit der Galaxienbildung unter der Annahme, daß sich die Galaxien gebildet haben, sobald genügend Raum vorhanden war. Ihr mittlerer Radius sei $30 h^{-1} \text{ kpc}$ und ihre heutige mittlere Anzahlichte sei $0.03 h^3 \text{ Mpc}^{-3}$.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Hubble-Diagramm	14
1.2	Dopplerverschiebung	15
1.3	Rotverschiebung	16
1.4	Rotverschiebung z in Abhängigkeit von r	17
1.5	Paralaxe	18
1.6	Cepheiden	19
1.7	Hertzsprung-Russell-Diagramm	20
1.8	Einfluß des Dichteparameters Ω_0	22
1.9	Lineare Näherung von $S(t)$	23
2.1	Winkelsumme im gekrümmten Raum	26
2.2	Ballonmodell	27
2.3	Lichtkegel in der Raumzeit	29
3.1	Lichtstrahl im Gravitationsfeld	34
3.2	Gravitationslinse	37
3.3	Minkowski-Raum	38
4.1	Raumschiff fällt in schwarzes Loch	45
4.2	Krümmung und Entwicklung des Universums	47
4.3	Dichteverlauf im Universum	51
4.4	Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors	52
4.5	Materieverteilung	56
4.6	Hubble-Diagramm für Typ-Ia-Supernovae	57
4.7	Anisotropie des Mikrowellenhintergrundes - MAXIMA-1	58
4.8	Konfidenzgebiete in der $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ - Ebene	59
5.1	Energiedichten für Strahlung und Materie	64
6.1	Spektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung	70
6.2	Fluktuationen im Spektrum der Hintergrundstrahlung	72
6.3	Das n/p -Verhältnis	75
6.4	Massenanteile	77
7.1	Zweikomponenten Spinraum	80
8.1	Potential in Abhängigkeit der Magnetisierung	94
8.2	Potential eines reellen Skalarfeldes ϕ	95

8.3	Higgs-Potential	96
8.4	Verlauf der inversen Kopplungskonstanten	99
8.5	Neutrino-Energiespektren	102
8.6	Der Super-Kamiokande Detektor	103
8.7	Detektierte Atmosphärenneutrinos	106
8.8	Neutrino-Oszillationsparameter	107
9.1	Kausaler Kontakt	117
9.2	Alter des Universums als funktion des Dichteparameters	120
9.3	Rotationsgeschwindigkeiten von Galaxien	121
9.4	Verlauf der Expansion	125
10.1	Verteilung der Galaxien	130
10.2	Anisotropie des CMB	131
10.3	Materieverteilung	134

Tabellenverzeichnis

1.1	Kosmologische und Astrophysikalische Konstanten	13
1.2	Kosmologische Abstände und Dimensionen	19
5.1	Freiheitsgrade	66
9.1	Baryonenzahlen	116

Literaturverzeichnis

- [1] Roos: *Introduction to Cosmology*, 1994
- [2] Weigert, Wendker: *Astronomie und Astrophysik*, 1988
- [3] Weinberg: *Gravitation und Kosmologie*, 1971
- [4] Goenner: *Einführung in die Kosmologie*, 1994
- [5] Turner, Kolb: *The early Universe*, 1990; sowie Börner, 1991
- [6] Coles, Lucchin: *Cosmology*, 1995
- [7] de Boer: *GUT's and SUSYs in Particle Physics and Cosmology*, 1994
- [8] Klapdor-Kleingrothaus, Zuber: *Teilchenastrophysik*, 1997
- [9] Drexlin: Phys. Bl., Februar 1999, S. 25
- [10] Bernstein: *An introduction to Cosmology*, 1998
- [11] SCP-Hompage: <http://www-supernova.LBL.gov>
- [12] D. Giulini, N. Straumann: Das Rätsel der kosmischen Vakuumenergiedichte und die beschleunigte Expansion des Universums, <http://xxx.lanl.gov>, arXiv:astro-ph/0009368
- [13] MAXIMA-1 - Homepage: <http://cfpa.berkeley.edu/group/cmb>

Index

- ALPHER, RALPH, 53
BOLTZMANN, LUDWIG, 44
COPERNICUS, NIKOLAUS, 1
DICKE, ROBERT, 54
DIRAC, PAUL A.M., 107
EINSTEIN, ALBERT, 15
FRIEDMANN, ALEXANDR, 21
GALILEI, GALILEO, 1
GAMOW, GEORG, 53
GAUSS, CARL FRIEDRICH, 29
HALLEY, EDMUND, 1
HAWKING, STEPHEN, 39
HERMAN, ROBERT, 53
HUBBLE, EDWIN P., 3
JEANS, SIR JAMES, 119
KEPLER, JOHANNES, 1
LEMAÎTRE, GEORGES, 22
LINDE, ANDREI, 110
NEWTON, ISAAC, 1
OLBERS, WILHELM, 2
PENZIAS, ARNO, 54
ROBERTSON, HOWARD, 30
SCHWARZSCHILD, KARL, 36
STEFAN, JOSEF, 44
WALKER, ARTHUR, 30
WILSON, ROBERT, 54
- Abelsche Algebra, 69
Absolutzeit, 28
Abstandsmessungen, 7
Adiabatische Expansion, 24, 45
Äquivalenz, 15
Äther, 16
Altersbestimmung, *siehe* Universum
Antikommutator, 69
Anzahldichte
 Baryonen, 57
 Galaxien, 118
 Photonen, 44
 Verhältnis, 60
Appearance-Experiment, 87
Astrophysikalische Konstanten, 3
Asymptotische Freiheit, 75
Auf-, Absteigeoperator, 67
Autokorrelationsfunktion
 Masse, 117
 Temperatur, 116
Axion, 120
- Baryonensynthese, 101
Baryonenzahl
 Differenz, 104
 Verletzung, 102
Betazerfall, 58
Big Bang, 12, 27
Big Crunch, 27
Bose-Statistik, 49
Braune Zwerge, 109
Bremsparameter, 12
- CDM, 109, 120
Chandrasekhar-Masse, 36
Chaotische Inflation, 110
Chorus, 95
CMB, 53
COBE, 54, 116
Comptonwellenlänge, 38
Coulombkraft, 43
CP-Symmetrie, 79
CPT-Symmetrie, 80
- deSitter, *siehe* Universum
Deuteron, 57
Dichtefluktuationen, 117
Dichteparameter, 11, 54, 61
Dipol-Anisotropie, 55
Disappearance-Experiment, 87
Diskrete Symmetrien, 77
Dopplerverschiebung, 6, 55

- Down-Top Szenario, 122
- Dunkle Materie, 107
- Eötvös, 20
- Eichboson, 68
- Eichfelder, 72
- Eigenwertgleichungen, 69
- Einstein-deSitter, *siehe* Universum
- Elektronen, 78
- Energiedichte, 45
- Energieerhaltungssatz, 24
- Entfernungs
 - Indikator, 9
 - Leiter, 7
 - Modul, 8
- Entkopplung, 60
- Ereignishorizont, 33
- Expansionsrate, 27, 49
- Family Unification Theory, *siehe* FUT
- Fermi-Statistik, 49
- FIRAS, 54
- Flavourverhältnis, *siehe* Neutrino
- Fluchtgeschwindigkeit, 4
- Fluktuationen
 - CMB, 115
 - Masse, 119
- Frühe Phasenübergänge, 102
- Freeze-Out, 84, 102
- Freiheitsgrade, 48
- Friedmann-Expansion, 112
- Friedmann-Lemaître, *siehe* Universum
- Fusionsreaktionen, 57
- FUT, 85
- Galaxien, Anzahldichte, 118
- Galaxienbildung, 115
- Galaxienhaufen, 108
- Gamow-Faktor, 59
- Gaugino, 120
- Gauss'sche Krümmung, 29
- Gebrochene Symmetrie, 72
- Geodäte, 28
- Ginzburg-Landau-Entwicklung, 81
- Globale Eichtransformation, 68
- Gluon, 74
- Gran Sasso Labor, 91
- Grand Unified Theory, *siehe* GUT
- Gravitationsgesetz
 - Newton, 10, 34
- Gravitationslinse, 19, 109
- Gravitationssysteme, 11, 31
- Gravitino, 120
- Great Wall, 122
- Große Vereinheitlichende Theorie, *siehe* GUT
- GUT, 83
- Hamiltonoperator, 65
- HDM, 109, 122
- Heiße dunkle Materie, *siehe* HDM
- Helizität, 78
- Helligkeit, 8
- Hertzsprung-Russell-Diagramm, 8
- Higgsfeld, 81
- Homogenität, 1, 31
- Hubble
 - Gesetz von, 3, 32
 - Radius, 5
 - Space-Telescope, 4
 - Zeit, 5
- Hyperfläche, 29
- Inflation, 101
- Inhomogenität, 115
- IRAS, 122
- Isospin, 71
- Isotropie, 1, 31
- Jeans
 - Masse, 119
 - Wellenlänge, 119
- Kalte dunkle Materie, *siehe* CDM
- KARMEN, 97
- Kausaler Kontakt, 32, 104
- Kosmische Hintergrundstrahlung, *siehe* CMB
- Kosmische Strings, 107
- Kosmologische Einheiten, 3
- Kosmologische Konstante, 23
- Kosmologische Konstanten, 3
- Kosmologisches Prinzip, 2
- Kovarianz, 33
- Krümmung, 29

- Krümmungsparameter, 30
- Kritische Dichte, 11
- Kritische Temperatur, 83
- Ladung
 - Konjugation, 79
 - Operator, 71
 - Raum, 71
- Landau-Oppenheimer-Volkov-Masse, 36
- LEP, 60
- Leptoquark-Vektorboson, 86
- Leptoquarks, 102
- lichtartig, 32
- Lichtjahr, 3
- Lichtkegel, 33
- Long-Baseline Experiment, 95
- Lorentztransformation, 6
- LSND, 97
- MACHOs, 109
- Magnetischer Monopol, 107
- Massenbehaftete Neutrinos, 87
- Massendichte-Kontrast, 117
- Massenfluktuationen, 117
- Materiedominanz, 24
- Materieverteilung, 115, [118](#)
- Maxwell-Boltzmann-Statistik, 49
- Maxwell-Lorentz-Gleichungen, 43
- Metrischer Tensor, 34
- Michelson-Morley, 16
- Mikrosekunde, Erste, 83
- Minkowski-Metrik, 28
- Minkowskiraum, 28
- Mitbewegende
 - Koordinaten, 30
 - Systeme, 31
- Mittlere Freie Weglänge, 49
- Mittlere Reaktionsrate, 49
- Monopolproblem, 107
- MSW-Effekt, 89
- Neue Inflation, 110
- Neutrino
 - Atmosphären, 91
 - Beschleuniger, 95
 - Familien, Anzahl, 60
 - Flavourverhältnis, 92
 - Fluß, 89
 - Massen, 87
 - Oszillationen, 86
 - Steriles, 94
- Neutrinos
 - Dunkle Materie, 122
- Nichtkommutative Algebra, 69
- Nukleosynthese, 57
- Olbers Paradoxon, 2
- Oszillationsparameter, 94
- Parallaxe, [7](#), 10
- Parität R , 86
- Parität, 77
- Parsec, 7
- Pauli-Matrizen, 68
- Pauli-Prinzip, 123
- Pfannkuchen-Modell, 122
- Phasenübergänge, 83
- Photino, 120
- Photodesintegration, 57
- Planck
 - Masse, 38
 - Zeit, 38
- Primordiale Nukleosynthese, 60
- Projektion, 70
- Proton, Lebensdauer, 86
- Pulsationsinstabile, 8
- Quadrupol-Anisotropie, 115
- Quantisierung, 65
- Quark, 73
 - Farbe, 74
 - Flavour, 73
 - Ladung, 74
- raumartig, 32
- Rekombination, 55
- Relativistische Teilchen, 46
- Robertson-Walker-Metrik, [30](#), 33
- Rotationsgeschwindigkeiten, 108
- Rotverschiebung, 3
- Sachs-Wolfe-Effekt, 112
- Schwache Hyperladung, 72
- Schwache Ladung, 71
- Schwarzes Loch, 37

- Schwarzkörperstrahlung, 55
- Schwarzschild-Metrik, 36
- Schwarzschild-Radius, 36
- Skalenfaktor, 11
- SNO, 90
- Sonnen-Neutrinos, 88
- Sparticles, 86
- Spin, 65
- Spinoren, 66
- Spiralgalaxien, 107
- Spontane Symmetriebrechung, 80
- Standardkerze, 9
- Standardmodell
 - Der Teilchenphysik, 75
- Stefan-Boltzmann-Gesetz, 44
- Sternhelligkeit, 2
- Strahlungsdominanz, 25
- Strukturkonstante, 75
- Super-Kamiokande, 87, 89
- Supernova, 36
- Superpositionsprinzip, 67
- Supersymmetrien, *siehe* SUSY
- SUSY, 86
- Symmetrien, 77

- Teilchenhorizont, 32
- Thermisches Gleichgewicht, 103
- Top-Down Szenario, 123
- Topologische Defekte, 107
- Triton, 57
- Turnover-Zeit, 27

- Unitarität, 67
- Universum
 - Altersbestimmung, 12
 - Anti-de-Sitter, 28
 - Dynamisches, 4
 - Einstein-deSitter, 23
 - Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, 23
 - Unendliches, 2

- Vakuum-Energie, 25, 110
- Vakuum-Energiedichte, 23
- Vektorboson, 81
- Verletzung
 - Baryonenzahl, 102
 - C-, 103
 - CP-, 103
- Viererimpuls, 34
- Virialtheorem, 108
- Virtuelles Paar, 39

- Weltlinie, 28, 33
- WIMPs, 120
- Wurmloch, 39

- zeitartig, 32
- Zeitumkehr, 80
- Zenithwinkelabhängigkeit, 92
- Zino, 120
- Zweites Thermodynamisches Gesetz, 45